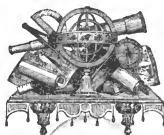
PRINCIPII FONDAMENTALI

INTORNO

ALLA MISURA DI UNA BASE GEODETICA

ESPOSTI DA

FEDERIGO SCHIAVONI

Professore di Geodesia nel Reale Officio Topografico,
Socio residente dell'Accademia Pontaniana.

NAPOLI

Real Tipografia Militare

1856.

INDICE *

* I numeri indicano i paragrafi.

PRINCIPII FONDAMENTALI

INTORNO

ALLA MISURA DI UNA BASE GEODETICA.

§. 1. Una triangolazioue geodetica, o che abbia per oggetto di assegnare la figura della terra, oppure che serva di fondamento ad una carta topografica, è sempre da riguardarsi un lavoro importantissimo, di cui l'esattezza dipende da quella della base e degli angoli della rete. E poichè è fatto incontrastabile tornar difficile molto in qualunque fisica ricerca approssimarsi alla verità senza far sagrifizio di mezzi, di tempo e di fatica; non parrà strano se noi, volendo quì parlare della misura di una base geodetica, diciamo essere tale soggetto quanto grave altrettanto difficile per l'esattezza che richiede, la quale se non giunge ad un grado eminente, pone ben tosto in mezzo inconvenienti grandissimi. Per rendere chiaro ciò che diciamo, suppongasi ABC (*fig. 1.a*) un triangolo geodetico, che per semplicità riguardiamo rettilineo; sieno A,B,C i suoi angoli, i quali consideriamo esatti, a,b,c i lati; e sia b una base affetta da un errore δb, di cui vogliam conoscere l'influenza sul

lato a. Dalla trigonometria si ha che in un triangolo ABC, a sen B$=b$ sen A; se dunque consideriamo a come funzione della variabile b, ponendo nella equazione antecedente in vece di $b, b+\partial b$, a diverrà $a+\partial a$, e si avrà $(a+\partial a)$ sen B$=(b+\partial b)$ sen A, ossia ∂a sen B$=\partial b$ sen A, od altramente $\partial b : \partial a = b : a$. Adunque l'errore della base b sta a quello del lato a nel rapporto di b ad a. Per la stessa ragione quando varii triangoli legansi l'uno all'altro, come avviene in una triangolazione, che muovendo da un lato fondamentale b giunge all'altro e (*fig.*[a] 2), l'errore di b starà a quello di e come $b : e$. Ora noi vedremo che una base di ragionevol grandezza non si estende al di là di 3 miglia, nel tempo che i lati di un triangolo di 1.° ordine hanno la lunghezza media di 20 miglia, dunque supposto il rapporto della base ad un lato della rete geodetica essere di $1 : 7$, l'errore di e sarà settuplo di quello di b: e ciò immaginando che nelle misure angolari non siesi commesso niuno errore; ma come tal cosa non è in verun modo presumibile, così l'errore sarà molto maggiore comunque sieno piccoli quelli degli angoli. Adunque è necessità che una base sia misurata con molta cura, perchè gli errori suoi, cumulati agli altri derivanti dalle misure angolari, non riducano una rete alla inesattezza.

§. 2. Muovendo dall'ipotesi che la terra sia un ellissoide di rivoluzione intorno all'asse minore, ne deriva che la base, la quale è la minima distanza tra due punti A e B (*fig.*[a] 3.) esistenti sullo sferoide terrestre, in generale sarà una linea storta. Però nel caso di cui è argomento, ove trattasi di una lunghezza elementare rispetto alle dimensioni della terra, può supporsi senza errore che AB si confonda sempre con un arco di cerchio massimo della sfera di cui il raggio è AN, normale menata per uno dei punti e terminata all'asse minore[1].

[1] Per convincerci di questa verità, sieno (*fig.*[a] 4.) PA, PB i meridiani sferoidici, che passano per A e B; AN, BN' le corrispondenti normali terminate all'asse minore dell'ellissoide: se descriviamo una sfera col raggio AN, essa toccherà l'ellissoide secondo il parallelo di A, e verrà segata da piani PAN PBN ANB negli archi massimi pA pB' AB'. Or noi vedremo

Laonde se vi fosse modo di misurare un tale arco sulle acque medie del mare, superficie cui si rapportano le posizioni geodetiche, si avrebbe in esso la base dimandata; ma ciò non essendo generalmente possibile, esponiamo il procedimento tenuto da Geografi in tali occasioni.

che qualora AB non ecceda di molto 30′, il punto B si confonde con B′, e l'arco AB con AB′. Di fatti, se l'arco AB è disteso su di un parallelo, i punti B e B′, come anche gli archi, si confondono; ma a proporzione che AB discostasi da tale posizione e, girando intorno ad A, si avvicina al meridiano, la distanza BB′ va crescendo, come pure la differenza tra AB AB′. Oltre a ciò, se il punto A è sull'equatore, dove la curvatura della terra pel verso meridiano è maggiore, e B è sul meridiano di A, la distanza BB′ sarà la massima ed ancora la differenza tra AB ed AB′. Or tenuto ciò presente, immaginiamo le condizioni sfavorevoli che A sia sull'equatore, e che B sia sul meridiano di A, e fingiamo AB di 30′; se AP è il meridiano sferoidico di A, (*fig.ª 5.*) su cui trovasi B, si tratta di trovare quanto B′ è distante da B, e quanto l'arco AB differisce da AB′. Indichiamo OA con a, OB con r, l'angolo BOA con φ, e l'arco AB con s: l'equazione dell'ellisse rapportata al centro ed espressa per l'eccentricità sarà: $y^2+x^2(1-e^2)=a^2(1-e^2)$, e come $x=r\cos\varphi$, $y=r\,\text{sen}\,\varphi$, così l'equazione polare sarà

$$r^2\text{sen}^2\varphi+r^2\cos^2\varphi(1-e^2)=a^2(1-e^2);$$

donde $r^2=\dfrac{a^2(1-e^2)}{1-e^2\cos^2\varphi}$, ed $r=\dfrac{a}{\left(1+\dfrac{e^2\,\text{sen}^2\varphi}{1-e^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Epperò sviluppando sarà

$$r=a\left[1-\tfrac{1}{2}\frac{e^2}{1-e^2}\text{sen}^2\varphi\cdots\right],$$

e limitandosi alla 2.ª potenza di e, sarà $r=a(1-\frac{1}{2}e^2\text{sen}^2\varphi)$; donde

$$BB'=a-r=\tfrac{1}{2}ae^2\text{sen}^2\varphi \quad (1).$$

D'altrove $ds^2=dy^2+dx^2$ ci offrirà $ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2$, ossia $ds^2=r^2\left[1+\dfrac{e^4\text{sen}^2\varphi\cos^2\varphi}{(1-e^2\cos^2\varphi)^2}\right]d\varphi^2$; dunque, fermandosi alla stessa potenza di e, sarà $ds=rd\varphi=a(1-\frac{1}{2}e^2\text{sen}^2\varphi)d\varphi$: ove posto $\dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$ in luogo di $\text{sen}^2\varphi$, si avrà $ds=a(1-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}e^2\cos 2\varphi)d\varphi$. Che se s'integra tra i limiti 0 e φ, si avrà $s=a[(1-\frac{1}{4}e^2)\varphi+\frac{1}{8}e^2\,\text{sen}2\varphi]$: e stabilita l'omogeneità, sarà

$$\frac{a\varphi}{R''}-s=\tfrac{1}{4}ae^2\left(\frac{\varphi}{R''}-\tfrac{1}{2}\text{sen}2\varphi\right) \quad (2):$$

e qui $\dfrac{a\varphi}{R''}$ esprime l'arco circolare, s l'arco ellittico. Applichiamo ora i

Sieno C e D (*fig.ª 6.*) i punti estremi di una base esistente su di un suolo possibilmente piano, come deve scegliersi acciò la misura sia affetta da errori minimi; sieno CO, DO le normali menate pei punti anzidetti, le quali possono senza errore considerarsi concorrenti in un punto O centro d'una sfera; sia mm' l'intersezione del livello medio del mare col piano COD, e C*dfhi*D l'intersezione dello stesso piano col suolo intercetto tra C e D: egli è chiaro che tra i punti C e D la linea di minima distanza sarà mm', proiezione di una misura, la quale proceda tra i due punti pel verso orizzontale e senza uscir mai dal piano COD. Però, a causa della sinuosità del suolo, è ben difficile che tra C e D tale misura potesse camminare secondo una linea di livello, ed in tal caso ecco il modo da tenersi. Fingiamo che l'apparato di misura qualunque esso sia, senza mai uscire dal piano COD e procedendo a gradoni, misuri orizzontalmente gli archetti C*b*, *de*, *fg*, *hi*, *k*D; è facile concepire come per le ondulazioni del suolo può assumersi che la somma degli archi suddetti elevati sul mare per le altezze C*m*, *db'*, *ff'*, *hg'*, *kk'*, le quali possono ottenersi per mezzo di una livellazione, sia uguale all'arco *ln*, esteso tra OC, OD ed avente l'altezza *h* medio aritmetico di $Cm + db' + \cdots$: ora si tratta di proiettare *ln* sul mare. Adunque note le C*m*, *db'* ec. e quindi *h*; conosciuta la lunghezza della misura *b*; indicando con N il raggio O*m*, e con B la base, dalla proporzione $B : N = b : N + h$, si avrà $B = \frac{bN}{N+h} = \frac{b}{1+\frac{h}{N}} = b\left(1 - \frac{h}{N} + \frac{h^2}{N^2} \cdots\right)$; e poichè la frazione $\frac{h}{N}$ è una quantità piccolissima, si possono quasi sempre trasandare le sue potenze superiori ed avere

$$b - B = \frac{bh}{N} \quad (1):$$

numeri alle formole (1) e (2) e nella ipotesi che in tese, $\log a = 6 \cdot 3147937$, $\log e^2 = 7 \cdot 8039924$ si otterrà $AB' - AB = 0^t{,}0023$, e $BB' = 0^t{,}7933$. Se dunque ammessi tutti i casi sfavorevoli le suddette quantità sono inferiori agli errori di osservazioni, ne deriva che AB ed AB' possono sempre ritenersi come due archi identici.

valore esprimente la correzione che deve subir la linea misurata onde ottenere la base. Osserviamo poi che il procedimento orizzontale della misura non è onninamente necessario; poichè potrebbe camminarsi a tratti leggermente inclinati, purchè si abbiano gli elementi da proiettare questi all'orizzonte.

Adunque per riassumere le condizioni importanti che riguardano tale argomento diciamo:

1.° Che la misura di una base debbe eseguirsi su di un terreno abbastanza piano:

2.° deve procedere nel piano verticale che passa pei due estremi [1]:

3.° deve camminare orizzontalmente, od anco inclinata, purchè si abbiano gli elementi da ridurla orizzontale.

Nè queste proprietà sono le sole di che la misura di una base abbisogna; poichè si richiede ancora (supposto che sia eseguita con spranghe metalliche):

4.° che le spranghe sieno di ben conosciuta dimensione rispetto ad un campione esattissimo:

5.° che si abbia mezzo da apprezzare la loro dilatazione; dappoichè sappiamo che col variare la temperatura tutti i corpi subiscono un'alterazione nelle dimensioni loro:

6.° che la misura sia accuratamente eseguita e verificata, non solo per evitare errori grossolani; ma anche per diminuire l'influenza dei piccolissimi ed inevitabili errori cui si va incontro.

§. 3. Noi abbiamo veduto avanti che l'influenza dell'errore di una base su di un lato della rete geodetica, è tanto maggiore quanto più la base è piccola; adunque, posta da banda ogni altra considerazione, una grande base sarebbe preferibile ad una piccola. In oltre il calcolo di compensazione dimostra che se una piccola base l sta ad una grande L nel rapporto di $1 : m$; esse, supposte misurate colla stessa precisione, produrranno sulla rete lo stesso errore, quando l sia misurata m volte, ed L una volta sola. Sicchè una base di 3 miglia

[1] Si noti che vi sono delle basi spezzate come quella di Melun, nella quale la misura procede in due piani diversi; ma base siffatta può considerarsi come composta di due.

dovrebbe esser misurata due volte per produrre sulla rete l'errore, che recherebbe una di 6 miglia misurata una volta colla stessa precisione. Però deve riflettersi che quì si ammette che nella misura di una base di 6 miglia possa ottenersi la esattezza stessa, che può raggiungere quella di 3, e ciò appunto è inammissibile:

1.° perchè è difficile trovare un'estensione di 6 miglia, che riunisca così bene come quella di 3 tutte le condizioni adattate alla misura di una base, e quindi le difficoltà del suolo debbono su di una grande base accrescere gli errori:

2.° perchè la necessità d'impiegare molto tempo alla misura di una grande base, tempo che cresce colle difficoltà del terreno, produce

a) che gli errori dipendenti dalla temperatura dell'apparato, i quali non possono mai essere apprezzati abbastanza, crescono rapidamente, quando i diversi tratti di misura sono eseguiti con temperature notabilmente diverse:

b) che verificandosi tempi avversi, come è naturale in lungo tratto di stagione, non solo gli errori di temperatura crescono più, ma ancora ne sorgono altri di un grado molto superiore, e dipendenti dal disagio, da interruzioni e da sconci non prevedibili, che le intemperie stesse possono produrre. Adunque per queste ragioni l'errore di una base di 3 miglia non deve considerarsi doppio di quello che produce sulla rete una base di 6. Epperò noi teniamo per fermo che una base di 3 miglia ed anche minore, misurata con molta precisione una volta per un verso ed una pel verso contrario; verificata col mezzo trigonometrico che accenneremo, e legata alla triangolazione coi metodi di compensazione ora usati; senza esitazione produce sulla rete un errore più piccolo di quello, che produrrebbe una base di 6 miglia, la quale, come le antiche basi, fosse misurata un ugual numero di volte e non godesse degli altri due vantaggi. Oltre di che la piccola base riunisce l'utilità di potersi misurare in brevissimo tempo, e con molta economia; giacchè non abbisogna di una traccia così lunga, e quindi di battuti, riempimenti, ponticelli così numerosi. In ciò che abbiamo ora esposto, come pure nella

maggior perfezione degli strumenti misuratori e dei metodi ora in uso, noi troviamo la ragione, perchè le basi misurate negli ultimi tempi da celebri astronomi, sono comparativamente piccole rispetto alle antiche, come si rileva dal seguente quadro.

Nome di chi ha diretto la misura della base.	Regione.	Epoca.	Lunghezza in tese.	*Osservazioni.*
Delambre	Melun	1791	6076	* Questa piccola base, che non giunge a mezzo miglio, legata per la triangolazione alla base di Lämmle, la quale è di circa 10 miglia, ha dato la differenza di poll. 2,5. Risultamento che dimostra la esattezza cui si perviene, quando la ottima direzione e diligenza estrema, sono accompagnate da buoni strumenti.
Schumacher	Braak	1820	3015	
Struve	Kattko	1821	2315	
Swerd	Spira	1822	441 *	
Bessel	Königsberg	1834	935	

Ci sembra dunque di poter conchiudere dietro le norme di questi uomini distinti che una base di 2 a 3 miglia convenevolmente misurata, verificata, e congiunta alla rete, sia bastevole a servire di fondamento anche alla misura di un arco di meridiano. Prima di uscire da questo argomento ci corre l'obbligo d'indicare il modo di porre a confronto trigonometricamente una base, e di stabilirvi sopra la rete geodetica.

§. 4. Comunque la verificazione trigonometrica di una base sia un argomento di calcolo di compensazione, sul quale ritorneremo, non è fuor di proposito che su di essa dicasi qui qualche parola, se non altro onde offerirne un'idea. Sia AC (*fig.ª 7.*) una base da verificarsi, la quale immaginiamo misurata in due tratti AB,BC presso a poco uguali, e contrassegnati da pilastri: si scelgano nelle vicinanze di essa i punti D ed E visibili da A, B, C, e tali da aversi i triangoli

ADB, BDC, CEB, BEA possibilmente ben condizionati: egli avverrà che misurati gli angoli dei triangoli suddetti, e corretti nel modo che insegna il calcolo di compensazione, col partire dalla base AB noi possiamo ottenere BC, e col partire da BC ottenere AB, e così avere una verificazione di BC e AB.

§. 5. Noi conosciamo che in un triangolo geodetico gli errori delle misure angolari sono minimi, quando esso è prossimamente equilatero: ora se ai triangoli si volesse procurare possibilmente tal forma, nel muovere che fanno da una base di 2 a 3 miglia, non si potrebbe mai giungere a 20 miglia, che è la lunghezza media dei lati di 1.° ordine. Per la qual cosa se nel partire dalla base i triangoli non possono mai essere di una forma favorevole, è necessario di ovviare a questo inconveniente, coi modi di verificazione che la scienza possiede, e che noi non facciamo quì se non se accennare, riserbandoci di trattarne in seguito. Adunque se vogliasi dalla base AB (*fig.ª 8.*) passare rapidamente e con esattezza sulla rete primaria, bisogna scegliere nelle vicinanze di AB, due punti C e D, i quali, legati alla base per triangoli possibilmente isosceli, [1] sieno visibili tra loro e da A e B, ed offrano la distanza CD alquanto maggiore del doppio di AB. Fa d'uopo scegliere ancora due altri punti E ed F soggetti alle stesse condizioni, e da offrire EF quasi quintupla di AB. Da tale scelta di punti, su cui non ci dilunghiamo, poichè soggetta a mille modificazioni a causa del terreno, ne deriva che EF potrà per la sua lunghezza figurare tra i lati di 1.° ordine: resta ora a vedersi come si può giungere su di EF col minor numero di errori.-Se ciascun punto si lega agli altri per osservazioni angolari, si avrà che partendo dalla base AB possono determinarsi i quattro lati del quadrilatero ADBC e la sua diagonale CD: di più il punto E può esser determinato partendo da AD, AC, CD, e

[1] È noto che fra i triangoli aventi la stessa base e tutti gli angoli osservati con uguale esattezza, solo gl'isoscell hanno su i due lati errore uguale.

parimente il punto F può esser determinato muovendo da BD, CB, CD. Adunque le posizioni de' punti E ed F possono verificarsi in varii modi anche geometricamente, ed ottenersi la distanza e la posizione di EF con esattezza sufficiente. Ciò basta per avere un'idea di questo fatto.

§. 6. Noi poco avanti accennavamo che il suolo, su cui misurasi una base, dev'essere abbastanza piano od al più leggermente ondolato, acciò la misura proceda quanto meglio si può orizzontalmente: ora aggiungiamo che questo dev'essere ancora abbastanza solido, acciò i segni provvisorii o permanenti, che s'interrano, siano duraturi nella identica posizione che loro si dà, ed affinchè l'apparato di misura, qualunque esso sia, giacciavi sopra inalterabilmente disteso.

Un'altra importante condizione è che i punti estremi della base ed altri intermedii sieno visibili tra loro e dai punti circostanti, e ciò non solo perchè essa sia verificabile trigonometricamente, ma ancora affinchè si presti con agevolezza a legarvi la triangolazione.

Le località che meglio si prestano ordinariamente alla misura di una base sono le spiagge, le sponde di fiumi, e le strade, le quali procedono in linea retta; e nelle regioni settentrionali potrebbe anche servire all'uopo la superficie delle acque, che per lungo tratto di tempo giace coperta di solido ghiaccio [1]. Però deve osservarsi che quest'ultima maniera di suolo, comunque eccellente per la pianezza della superficie, presenta alcuni inconvenienti; uno de' quali è quello di non potersi avere segni durevoli se non se agli estremi (ammesso che questi giacciano fuori delle acque); l'altro è la rigidezza della stagione, in cui può usarsi questa maniera di suolo, la quale non è molto favorevole alla precisione.

§. 7. Scelto convenevolmente il terreno su cui la base deve misurarsi, una delle prime operazioni è quella di segnare sul suolo la traccia, secondo la quale la misura deve procedere. Tale operazione si esegue pel mezzo di un teodolite piantato

[1] Textor sull'Haff ha eseguito sopra di un suolo siffatto la misura di una base.

ad un' estremità della linea, il quale col cannocchiale dà la direzione della traccia da aprirsi. Segnata poi sul terreno la linea secondo la quale la base dev'essere misurata, si deve aver cura di spianare possibilmente il suolo, di costiparlo, e di costruirvi sopra de' ponticelli dove la necessità lo richiede.

È importante poi che i due estremi della base, come anche un punto verso il mezzo, il quale serve alla verificazione trigonometrica, abbiano tracce incancellabili; epperò si usa in ciascuno di questi tre punti d' interrarvi un grande macigno con sopravi una tabella di bronzo avente una crocetta, che nella sua intersezione indica il punto del terreno. Siccome poi il macigno insieme colla tabella restano sotterrate, così tanto per lo procedimento della base, quanto per le misure angolari da farsi ai tre punti accennati, è necessario costruire in ciascuno di essi un solido pilastro di fabbrica, il quale sulla faccia superiore abbia un' altra tabella di bronzo con una croce, che corrisponda esattamente a piombo col segno interrato. Quali sieno i mezzi per eseguire la proiezione del punto del terreno sul pilastro è agevole immaginarlo, solo avvertiamo che essa deve eseguirsi con una estrema precisione [1]. Crediamo ora conveniente di dire qualcosa sugli apparati che servono a misurare una base.

§. 8. Varii mezzi sono stati adottati in diverse occasioni per misurare una base, però comechè non tutti garentissero la stessa precisione, non pertanto è utile di far cenno dei principali.

Gl' inglesi per misurare la base di Haunslow-Heath nel 1784 usarono un apparato di legno. Esso si costituisce di tre spranghe di vecchio legno tagliato a fibbre diritte, ciascuna delle quali aveva 20 piedi di lunghezza tra le linee estreme di coincidenza, ed era congegnata talmente, per via di traverse, da non piegare in niun verso. Tali spranghe venivan situate su cavalletti in continuazione, ed orizzontali. L' ap-

[1] Bessel nella misura della sua base in Prussia volle a questo modo assicurare anche i vertici dei primi triangoli che ad essa si appoggiano.

parato di cui è parola, quantunque non possa riguardarsi attualmente a livello della scienza, a causa delle grandi variazioni del legname per effetto della temperatura ed umidità [1], pure in qualche occasione può servire se non altro ad una base provvisoria [2].

§. 9. La catena come quella di Ramsden servita agli Inglesi per la misura della stessa base, e delle altre eseguite nelle Indie, si costituisce di verghette di acciaio ciascuna di un piede di lunghezza, collegate tra loro a cerniera e formanti insieme 100 piedi. [3]. Essa nello adoperarsi si distende su di un letto di abete sostenuto da cavalletti, quivi viene orizzontata, e mediante due pesi costanti che si applicano alle sue estremità è convenientemente tesa. Varii termometri poi servono ad indicare la temperatura della suddetta catena.

Questa maniera di apparato ha maggiore importanza del precedente, quando è eseguito con precisione; ma ha tre inconvenienti: 1.° che la temperatura del metallo è contrassegnata da termometri a mercurio, i quali come l'esperienza ha provato, danno la temperatura dell'ambiente e non quella interna del metallo che subisce la dilatazione; 2.° che per effetto dell'ossidazione, la quale ha luogo quasi immancabilmente alle cerniere, la catena subisce alterazione nella sua lunghezza; 3.° che campionata questa quando è distesa, come le sue parti non soffrono tutte uguale tensione, così ciascun pezzo isolatamente impiegato non serba la lunghezza che aveva nell'atto della campionatura.

[1] Sulla irregolarità di dilatazione del legno alle varie temperature, e sull'influenza che vi esercita l'umidità, si veda l'opera di Prony. *Description des opérations faites en Angleterre pour déterminer les positions des observatoires de Greenwich et de Paris.*

[2] A quest'oggetto potrebbe anche impiegarsi un cordino reso inestensibile, ed impenetrabile all'umidità con pittura ad olio. Esso, della lunghezza di un 200 piedi, avendo alle estremità de' contrappesi ed appoggiato su piccoli cavalletti, va disteso orizzontalmente ed allineato per mezzo di un teodolite od altro strumento. Ciò fatto con una spranga di dimensione ben conosciuta si va eseguendo accuratamente la misura lungo il cordino in vece di farlo sulla terra. Questo procedimento è stato adoperato da Struve.

[3] Una catena simile costrutta da Berge ha servito alla misura della nostra base di Castelvolturno.

§. 10. Nella stessa misura della base di Haunslow-Heath sono stati anche adoperati i tubi di vetro come spranghe di misura, e ciò dopo la sperienza che essi sono meno dilatabili delle verghe solide della stessa sostanza, del ferro, dell'acciaio e del rame. Questo apparato ha poi il grave inconveniente di esser fragile e non molto omogeneo, nel tempo che sulla catena non ha altro vantaggio, se non se quello di essere meno dilatabile: superiorità che val poco, poichè la questione è questa: o si deve usare una sostanza che non abbia sensibilità veruna ai cambiamenti di temperatura, ciò che è quasi impossibile, oppure usarne una qualunque, purchè si sappia apprezzare sino al capello ogni sua dilatazione.

§. 11. Hassler, nei lavori eseguiti in America, ha misurato la sua base con spranghe costituite di 4 pezzi, ciascuno di 2^m, che si univano l'uno all'altro con grampe di ferro. Gli estremi di ogni spranga in proiezione orizzontale si mostrano come nella fig.ª 9; cioè mancanti dello spazio *acb*, ove si distende un filo micrometrico *ab*. Nell'atto della misura ai due estremi della spranga venivan situati due microscopii indipendenti da questa, ognun de' quali era armato di due mezze lenti di diverso fuoco disposte siffattamente da vedere il filo micrometrico *ab* soprapporsi ad una croce segnata sur una tavoletta di avorio collegata al microscopio. Oltre i due microscopii indicati ve n'era poi un terzo da usarsi nella seconda battuta senza spostare i due primi. Per non dilungarci sulle altre particolarità di tale apparato diciamo, che esso era ingegnoso e semplice, ma non possiamo fare a meno di notarvi alcuni inconvenienti: il primo che in esso la temperatura non possa investigarsi altramente che per termometri esterni; il secondo che le spranghe si riducano in varie parti, per lo che la campionatura non è molto sicura; terzo finalmente che le estremità sieno contrassegnate da fili fragilissimi.

§. 12. Comunque l'ordine cronologico richiedesse altramente, ora più che dopo sembraci opportuno dir motto dell'apparato di Porro. Esso si costituisce di una spranga di abete a fibbre dritte, dipinta ad olio, della lunghezza di 3^m, del

diametro di $0^m,01$, e composta di 3 pezzi avvitati. Tale spranga è contenuta in un tubo di rame, donde, sorretta da varii diaframmi, sporge coi soli estremi segnati su Nikel. Il tubo poi, sostenuto alle sue estremità, ha tal curvatura che per effetto del proprio peso distendesi in linea retta. L'apparato è fornito di microscopii indipendenti, poco diversi da quelli usati da Hassler; di una lente di allineamento; di livello ec. Ora il principio, su cui si fonda l'apparato in discorso, è che l'abete dipinto non subisca alcun cambiamento longitudinale per effetto dell'umidità e delle variazioni di temperatura: ciò che non sembra rigorosissimo, se vogliam prestar fede alle sperienze di Beaufoy [1], ed a ciò che si è sperimentato in Inghilterra in occasione della misura della base di Haunslow — Heath [2]. Che se al legno si volesse sostituire un solo metallo, si anderebbe incontro allo inconveniente del termometro esterno. L'avvitamento dei diversi pezzi poi, neppure sembra lodevole, quantunque sievi chi proponga doversi la spranga campionare sul luogo, per non avere a temersi variazioni nella sua lunghezza: idea questa che si vedrà non essere molto felice, quando ragioneremo delle cure di che abbisogna tale operazione.

Abbiamo però notizie comunque non ancora molto specificate che in Francia il Deposito della Guerra ha fatto subire all'apparato suddetto pregevoli modificazioni. Fra esse è importante quella di aver sostituito alla spranga di abete una doppia spranga di rame ed acciaio, la quale ha in mezzo il punto di unione, ed a ciascun estremo un termometro metallico. Quanto a tale innovazione, sembraci che l'Ill: P. Secchi abbia anche fatto di meglio, quando all'acciaio ha sostituito il ferro battuto; giacchè se l'acciaio dell'apparato francese si dilata molto regolarmente, come assicura il distinto colonnello Hossard; tal fatto non distrugge quanto Arago e Biot hanno sperimentato in favore del ferro; ed assai meno annulla il principio logico che i metalli semplici si dilatino più regolarmente de' composti.

[1] Ency. Metrop. vol. VIII p. 626 (Wooden Pendolum).

[2] Si veda Prony opera citata avanti.

§. 13. Ancora molto ingegnoso è l'apparato a compensazione eseguito da Troughton ed immaginato dal Gen.le Colby. Esso fu per la prima volta applicato alla misura della base d'Irlanda, ed ultimamente alla verificazione di quella di Salisbury.

(Fig.a 10.) Tale apparato si costituisce di una verga di Ferro F saldata in mezzo ad una verga di rame R, mediante un dado A lungo due pollici. Tali verghe hanno agli estremi, congiunte per mezzo di cerniere a doppio cono, le linguette di acciaio ab $a'b'$, le quali a 60° F son perpendicolari alle verghe, ed in b e b' recano due impercettibili punti di platino, tra cui passa la distanza di 10 piedi inglesi. Ecco poi il principio di questo meccanismo.

Le verghe menzionate assoggettate a numerose sperienze mostrarono dilatarsi nella ragione di 3 a 5, onde supposto il coefficiente di dilatazione del rame essere 0,000017699 per 1° C, quello del ferro sarà 0,000010619. Or, poichè l'apparato è saldato in mezzo, noi possiam considerarne una sola metà; cosicchè riducendolo ai suoi assi ideali, ed alla temperatura di 60°F=15°.56C, sarà *(fig.a 11.)* hc la mezza verga di ferro $=5^{pd}$; ke l'altra di rame $=5^{pd}$; ea la linguetta di acciaio, hk il dado. Che se supponiamo il dado e la linguetta tuttaddue inestensibili, elevata la temperatura di 1° C al di sopra di 15°,56, ke crescerà di de; ch crescerà di bc, e la linguetta prenderà la posizione ad. Vediamo ora qual lunghezza deve avere la parte ac della linguetta, acciò la posizione di a resti possibilmente inalterata. A tal fine facciasi $ac=x$, $ec=d$, $bc=f$, $de=r$, sarà $x:f=x+d:r$, onde $x=\frac{df}{r-f}$, e questa sarà la lunghezza di ac. Applichiamo ciò al nostro caso.

Un piede della verga di rame per 1° C si dilata di 0,000017699, dunque 5^{pd} si accresceranno di $r=0,000088495$: per analogo ragionamento si troverà $f=0,000053095$, e come $d=2^{pol'}=0^{pd},16667$, così applicati questi valori alla formola antecedente si avrà $x=0^{pd},2499814$. Dunque le due punte di platino debbono esser distanti dall'asse della verga di ferro per la quantità trovata.

Però deve osservarsi che, considerata la linguetta ea

inestensibile, il punto a non resta rigorosamente immutabile, quando si eleva la temperatura, ma prenderà la posizione a' distante da ae per $a'c' = ae\,(\tan a - \operatorname{sen} a)$ [1] e lo stesso avviene in verso opposto se la temperatura si abbassa; per la qual cosa $a'c' = 0$ finchè $\tan a = \operatorname{sen} a$. Oltre di ciò deve notarsi che, se i cambiamenti di temperatura sono significanti, non si possono affatto considerare inestensibili il dado kh e la linguetta; sicchè per queste ragioni l'apparato in parola è esatto in limiti di temperatura molto ristretti. Un apparato a compensazione molto più semplice ed esatto del precedente, sembrami potersi comporre sui principii che ora esponiamo.

§. 14. Noi sappiamo che lo zinco per 1°C si dilata di 0,000030110 quand'esso è martellato; e che il ferro dilatasi di 0,000011820: se dunque ad una spranga di ferro ac (*fig.*ª *12*) sievi soprapposta asse ad asse un'altra di zinco ab saldamente fermata alla prima in a, e libera in tutto il resto della lunghezza, egli è facile vedere che quando $ac : ab = 2{,}547377327 : 1$, lo spazio bc resterà costante a qualunque temperatura; giacchè colla dilatazione di ac e di ab i due punti c e b si allontanano da a per quantità uguali. Che se la parte bc, la quale deve servir di misura, vogliasi di un'assegnata dimensione, a mo' d'esempio 2^m; allora facendo $ab = x$, e $2^m{,}547377327 = a$, per la proporzione $2^m + x : x = a : 1$, si ottiene $x = \dfrac{2^m}{a-1}$ $= 1^m{,}292509567$; epperò tagliata la spranga di ferro $ac = 3^m{,}292509567$, e quella di zinco $ab = 1{,}292509567$, ne deriva che a qualunque temperatura sarà sempre $bc = 2^m$. Ma una tale operazione è facile a dirsi, ma non ad eseguirsi praticamente con la esattezza necessaria onde ottenere 2^m precisi; quindi il procedimento migliore è quello di tagliare le spranghe con approssimazione sufficiente; e di tener conto,

[1] $\operatorname{Tan} a = \dfrac{de}{ae}$, $\operatorname{sen} a = \dfrac{de}{da}$, dunque se tali valori si sostituiscono nell'eq.ª di sopra, si avrà $a'c' = ae\left(\dfrac{de}{ae} - \dfrac{de}{da}\right) = ae\dfrac{(de \times da - ae \times de)}{ae \times da} = \dfrac{(da - ea)de}{da}$; ma $da - ae = aa'$, dunque $\dfrac{a'c'}{aa'} = \dfrac{de}{da}$.

se bisogna, di una correzione da farsi poi sui 2^m: rendiamo ciò chiaro con un esempio. Suppongasi sperimentato il coefficiente di dilatazione delle due spranghe, e sia il precedente; immaginiamo ancora le due spranghe soprapposte l'una all'altra, fermate insieme, ed un po' più lunghe del necessario: se si pone la doppia spranga nell'acqua che abbia la temperatura di 20° C (temperatura presso di noi media de' mesi propizii alla misura di una base) e dopo averla fatta stare il tempo necessario ad equilibrarsi si tagli la spranga di ferro $=3^m,2925$ e quella di zinco $=1^m,2925$: ne nasce che la $b\zeta$ non sarà più di 2^m precisi a qualunque temperatura. Di fatti elevata questa a 40° C, le spranghe diverranno rispettivamente 3,293278347 e $1,^m293278344$, grandezze la cui differenza è minore di 2^m per la frazione $0^{mm},000003$, la quale è trascurabile. Lo stesso potrebbe dirsi se la temperatura si porta a 0°, e conchiudere che la misura offerta dalla doppia spranga tra 0° e 40° può considerarsi costante [1].

Quì pervenuti immaginiamo che vogliasi su tale principio costruire un apparato di misura: in tal caso bisogna osservare che oltre la diligenza necessaria nel porre a sperimento la dilatazione speciale dei due metalli, fa d' uopo ancora un congegnamento onde operare con facilità; epperò su tale argomento vogliam dire parola.

Quanto alle spranghe diciamo che quella di ferro, affinchè non sia pesante e flessibile molto, dovrebbe avere la sezione indicata da A (*fig.ª 15*) con l'altezza di $0^m,05$ e la larghezza di $0^m,03$: e quella di zinco a sezione rettangolare dovrebbe avere $0^m,02$ di larghezza e $0^m,01$ di altezza. Tuttaddue poi avvitate e saldate insieme ad un estremo, all'altro dovrebbero avere incastrata una tabella di argento con sopravi una croce

[1] Potrebbe dimandarsi: quale è il vantaggio di una spranga compensata su di un' altra costrutta con termometro metallico? Il vantaggio consiste in ciò che una volta conosciutane la lunghezza si evitano tanti calcoli di riduzione quante volte la spranga è contenuta nel numero di basi che si vogliono con essa misurare: calcoli, i quali non essendo pochi, potrebbero talvolta lasciarsi macchiare da qualche errore. Vero è però che per compensare una spranga mollissime sperienze si debbono praticare; ma, queste esaurite, null'altro restavi a fare.

finissima: e sia notato che la spranga di zinco vorrebbe esser terminata a scalpello. A tal modo la distanza *bc* (*fig.ª 13*) tra le due croci offrirebbe i 2^m.

Sulla spranga di ferro, in mezzo di *bc*, dovrebbe stabilirsi un livello *e* legato a cerniera alla colonna *d* ed appoggiato all'altra *d'* con una vite a testa graduata, la quale offre, mediante la scala *s*, le varie inclinazioni cui la spranga è soggetta, dopo avere sperimentato l'altezza della vite quando la spranga è orizzontale, e l'inclinazione della spranga ad ogni giro della vite.

Sulla stessa spranga di ferro, nel mezzo di *ab*, sorgerebbe un cannocchialetto micrometrico, il quale spezzato, onde girare per 180°, avrebbe il basamento così costrutto da non impedire il libero passaggio alla spranga di zinco. Esso cannocchiale servirebbe all'allineamento, come or vedremo.

Per effettuar la misura la doppia spranga dovrebbe ancora camminare successivamente su di un letto orizzontale o poco inclinato: ora ciò si ottiene mediante i banchi *ghnk* posti in continuazione, e sostenuti da' cavalletti *mm* su i quali essi poggiano. Ognuno di siffatti banchi dovrebbe costituirsi di una travetta di abete sorretta da' piedi *gh ik*, e sostenuta da un'ossatura di ferro. Essa alla parte superiore dovrebbe avere una scanalatura longitudinale guarnita inferiormente di cilindri su cui poggiare e scorrere la doppia spranga, e lateralmente di due fasce di ferro le quali, assegnate a sostener gli assi dei cilindri, dovrebbero esser tra loro inalterabilmente connesse. Essi banchi al numero di 7 (cioè 6 di 2^m di lunghezza ed 1 di 1^m,3) dovrebbero esser dipinti ad olio.

I cavalletti *mm* dovrebbero avere la loro testa, la quale s'innalzi, si abbassi e giri all'uopo per un piccolo arco nel piano della figura, e ciò quando la battuta procede a piano inclinato. Oltre a ciò essi non dovrebbero mancare ai 3 piedi di bottoni di ferro da adattarsi sulla testa di picchetti impiantati nel suolo.

L'apparato abbisogna ancora di 3 microscopii micrometrici tra loro indipendenti, dei quali due in ogni battuta

occuperebbero le estremità dei 2^m, e l'altro servirebbe alla battuta seguente. Notiamo poi quì che la spranga tanto per adattarsi esattamente sotto i microscopii, quanto per allinearsi, deve poter ricevere un movimento longitudinale ed un altro azimutale; per lo che non dovrebbe mancare di due viti a contrasto le quali adempiano a tale uso.

Ritornando al cannocchiale, se esso si suppone siffattamente situato che la sua linea di collimazione passi per le croci della doppia spranga, è facile concepire il modo di allinear l'apparato; dappoichè al principiar della misura, posto un teodolite al punto di partenza col cannocchiale allineato verso il punto di arrivo, ne verrà che quando le croci micrometriche dei due cannocchiali cadono l'una sull'altra, la spranga si troverà allineata; ed avanzata la misura, quando il cannocchialetto si allinea su due segnali posti agli estremi della base, la spranga trovasi anch'essa allineata, e così via.

Tutta la difficoltà sta dunque a porre il cannocchiale precisamente nella posizione dimandata: ora a ciò si perviene, se vengon piantati due teodoliti distanti fra loro per una trentina di metri, coi cannocchiali rivolti l'un contro l'altro e colle linee di collimazione in linea retta, e poi verso il mezzo per via di saggi si pone la doppia spranga sulla stessa retta, e propriamente di maniera che le sue croci sieno nella linea di collimazione de' teodoliti; dappoichè quando ciò si è ottenuto il cannocchialetto si può stabilire talmente che la sua linea di collimazione si confonda con quella dei teodoliti e passi in conseguenza per le due croci segnate sulla doppia spranga. È d'uopo però avvertire che procurata al cannocchiale tal posizione, bisogna provvedere che essa non si alteri.

Sarebbe inutile di aggiungere altro intorno all'apparato di cui è argomento; dappoichè le particolarità che riguardano la costruzione ed il suo uso sono cose ovvie per un geografo; non pertanto avvertiamo che se per le condizioni del suolo deve cambiarsi il piano di misura, si situano i banchi secondo il nuovo piano, che fingiamo inclinato al-

l'altro in cui giace la spranga, e per mezzo di una corda di minugia si dispone il piano antico, sicchè i suoi cilindri sieno allineati con quelli del nuovo. Ciò eseguito si fa passare la spranga sul nuovo letto, e come la posizione dell'ultimo microscopio è la stessa, così la nuova misura sarà collegata all'antica; se non se avrà inclinazione diversa coll'orizzonte lo che non nuoce menomamente.

§. 15. Per finirla ci resterebbe a dir parola dell'apparato di Borda, impiegato dai Francesi alla determinazione del metro definitivo, e di quelli usati da Schumacher, Swerd ec.; ma ne faremo a meno, giacchè il primo quasi in nulla differisce da quello adoperato da Bessel e che noi descriveremo, gli altri poco dissimili tra loro, hanno gli stessi inconvenienti della catena già descritta, poichè si costituiscono di spranghe metalliche di cui la temperatura è apprezzata da termometri a mercurio.

Fatto un rapido cenno dei principali mezzi adoperati per misurare una base, crediamo utilità di fare una larga descrizione dell'apparato che usò Bessel, allorchè ebbe a misurarne una che servir doveva di fondamento alla determinazione dell'arco meridiano di Prussia, apparato che quantunque non molto semplice noi stimiamo meritar preferenza su di tutti.

§. 16. Esso si costituisce di quattro spranghe di ferro battuto di figura parallelepipeda, bene spianate e pulite, delle quali ognuna ha la lunghezza di 2^t, la larghezza di 12^l, *(fig.ª 14.)* e la spessezza di 3^l. Su ciascuna di esse, rappresentata da ff' e che supponiamo orizzontale, si distende asse ad asse una spranga di zinco zz', la quale, avendo la metà della larghezza uguale spessezza e lunghezza alquanto minore, è saldata alla ff' in k, e pel resto della sua lunghezza libera, ma a contatto di questa. Agli estremi k e k' della zz' v'hanno saldati due pezzi di acciaio, i quali hanno forma di cuneo collo spigolo orizzontale perpendicolare all'asse della spranga. La spranga di ferro poi dalla parte f termina con faccia piana, e dalla f' ha soprapposto e fermato il pezzo di acciaio cc', che in c e c' ha due cunei cogli spigoli verticali. Come poi ciascuna doppia spranga solo quando è distesa in piano dà la esatta misu-

ra, così, onde impedir la flessione, essa è sostenuta da una spranga di ferro *mm'* larga 6^l, ed alta 14^l, cui sono affidate ad uguali intervalli 7 coppie di rotelle, che non solo servono di sostegno alla doppia spranga, e le impediscono la flessione, poichè i loro diametri sono studiatamente disuguali, ma anche le agevolano il movimento longitudinale, giacchè la spranga col girar delle rotelle può muoversi tra le fasce *d*. Quanto alla *mm'*, essa poggia su due sostegni affidati saldamente alla cassa dell'apparato, ed acciò le alterazioni cui la cassa è soggetta non le facciano cambiar forma, vi si appoggia per due assicelli, di cui uno entra in un buco circolare e l'altro in un buco ellittico alquanto ampio. Per fare poi che il moto longitudinale della spranga di misura sia regolato, v'ha una vite di richiamo *r*, di cui il nodo sferico gira in un pezzo *h*, che fa sistema con *mm'*, e la madrevite *n* pel pezzo *g* fa sistema colla *ff'*. Per misurare l'inclinazione dell'apparato, verso il mezzo sorgono dalla spranga *mm'* (*fig.ª 14bis*) due colonne *ll'* sostenenti il livello *n*, il quale sulla *l* muovesi a cerniera, e sulla *l'* si appoggia per una vite *p* di cui i movimenti sono apprezzati da una scala *q*. Le colonne anzidette sono poi così collegate alla *mm'* da permettere che per sotto il loro basamento la spranga di misura potesse aver libero il suo movimento longitudinale.

Ciascuna spranga di misura cogli accessorii indicati è contenuta in una cassa di abete (*fig.ª 15.*) dipinta ad olio, con sopravi segnato uno de' numeri progressivi I, II, III, IV, che la distingue: e tali casse han solo tre aperture, delle quali le due prime *r* servono a fare sporgere fuori gli estremi della spranga di misura, e l'ultima *s* a tenere scoperto il livello [1].

Ogni cassa va situata su due cavalletti di quercia *t'*, ciascuno avente per base un tavolone dello stesso legno, il quale soprac-

[1] Nelle casse usate da Bessel v'ha un altro finestrino, pel quale può farsi la lettura di un termometro a mercurio: termometro che ha servito unicamente a sperimentare come esso segni poco esattamente la temperatura delle spranghe; giacchè Bessel tenendo registro del termometro a mercurio in ogni portata, e pel suo mezzo calcolando la dilatazione delle spranghe, ha dedotto una lunghezza di base diversa dalla vera per 11^l,876.

caricato di pesi, mercè tre viti che scendono su picchetti spinti nel suolo a rifiuto, procura all'apparato sufficiente stabilità. È utile poi di avvertire che tali cavalletti sono condizionati di maniera, che possono sollevare od abbassare la cassa onde livellarla, e permetterle quel movimento azimutale necessario all'allineamento della spranga, allorchè si esegue la misura.

Siccome le spranghe anzidette, allorchè si adoperano, vanno situate l'una in prolungamento dell'altra senza toccarsi, perchè non venga alterata la misura e non subisca ostacolo la dilatazione del metallo, così per misurare tanto lo spazio intercetto tra una spranga e l'altra, quanto la distanza dei cunei k' e c, che chiamasi termometro metallico, si è immaginato un cuneo di cristallo detto *cuneo geometrico*, il quale misura gli spazii indicati interponendovisi. Esso ha due facce parallele *al*, *cn* (*fig.ª 16.*), e due altre *am*, *bn* egualmente inclinate tra loro siffattamente, che la distanza tra le parallele *ab* *kl* è di 41^l, $ab = 2^l$, e $kl = 0,8$. Su la faccia *ab* sono poi segnate 120 linee *ab* $a'b'$.. *kl* perpendicolari alla retta che divide per metà l'angolo delle facce inclinate, e quindi a partire dalla *ab*, ognuna di queste linee è quasi esattamente minore della precedente per $0^l,01$, e lo spazio tra loro intercetto è ampio abbastanza da apprezzarsene la decima parte ossia $0^l,001$. Il cuneo, come dicevamo avanti, va usato per misurare (*fig.ª 14.*) lo spazio $k'c$ sulla spranga di misura, oppure quello tra una spranga e l'altra; epperò nel 1.° caso esso s'introduce con garbo nello spazio da misurarsi, sino a che la inferiore delle facce parallele giaccia nel piano della spranga, e le facce inclinate sieno a contatto dei cunei k', c; nel secondo caso, in cui supponiamo per maggiore generalità che le spranghe abbiano una inclinazione, si pone la faccia inferiore delle parallele del cuneo, parallelamente al piano di una delle spranghe, acciò quando si tratta di proiettare all'orizzonte tale spranga si faccia insieme colla parte data del cuneo in una sola misura, come vedremo in seguito [1].

[1] Noi, rispettando le buone ragioni che ha potuto avere un uomo così

Avviene spesso che nel fare uso di questo apparato sia necessario di proiettare al suolo una estremità della spranga di misura, o perchè le condizioni del terreno richiedono di procedere a gradoni, o perchè vuolsi sospendere il lavoro: in tale congiuntura si fa uso di un piombinò a punta acutissima, il quale, onde non essere agitato dal vento, in apposito tubo di cristallo si fa scendere dall'estremo della spranga sino a terra, ove preventivamente con bastante approssimazione è piantato un picchetto di ferro avente sulla testa una tabella di bronzo con croce molto esile, tabella che è tenuta a contrasto da tre viti, e che in conseguenza può recarsi perfettamente in direzione del filo. È utile di avvertire poi che, quante volte è necessario di piantare a terra cosiffatti picchetti, bisogna farlo quando l'apparato non è molto vicino al luogo, altramente si anderebbe soggetto a scuotimenti: ed a proposito della sospensione del lavoro vogliamo anche notare, che l'apparato deve restare sul luogo nella posizione dell'ultima misura, bene inteso che tanto

eminente come Bessel onde dare al suo cuneo la costruzione indicata, crediamo vantaggioso, che esso in vece abbia la forma di un prisma retto che ha per base un triangolo rettangolo *gki*, e le linee di divisione perpendicolari al cateto *gk* (*fig.*^a *17.*). Di fatti una tal forma è più propria a misurare lo spazio *k'c* col poggiare la inferior faccia del cuneo geometrico sulla spranga *ff'*, e col tenere la sua faccia *gk* a contatto del taglio *k'* del cuneo orizzontale della *zz'*. Che se deve misurarsi lo spazio intercetto tra due spranghe, questa maniera di cuneo è ancora più vantaggiosa, dappoichè supponiamo (*fig.*^a *18.*) che le due spranghe di misura A e B, giacciano tra loro inclinate, fatto questo molto ovvio, in tal caso se il cuneo avesse la costruzione da noi indicata, l'asse *oc* della spranga A, e la misura *cd*, data dal cuneo messo colla base parallelamente alla faccia di A e colla faccia laterale *gk* (*fig.*^a *17.*) a contatto del cuneo *c* (*fig.*^a *18.*) della A, saranno tuttaddue in continuazione, come ancora la loro proiezione *of* sarà una retta unica; quindi chiamato *i* l'angolo pel quale la A inclinasi all'orizzonte, *l* la lunghezza di essa, e *n* la distanza *cd* offerta dal cuneo, l'espressione $(l+n)\cos i$ darà la proiezione *of* di tutta la *od* all'orizzonte. Se al contrario immaginiamo le linee di divisione del cuneo perpendicolare alla retta che divide per metà l'angolo delle facce inclinate, come nel cuneo di Bessel: egli avverrà che nel primo uso il cuneo non può acquistare una posizione certa tra *k'* e *c*, e nel secondo tutte esse rette saranno inclinate all'asse di A, quindi il voler proiettare, come lo stesso Bessel ha fatto, le *oc* e *cd* in una retta unica *of* non è esatto a tutto rigore.

questo, quanto il punto a terra, cui corrisponde l'estremo dell'ultima spranga, debbono esser tutelati, dall'intemperie e da qualunque guasto, con quei mezzi che è facile immaginare.

§. 17. Per procedere poi con tale apparato alla misura della base, si situa sulla traccia di questa la cassa n.° I, sicchè il cuneo orizzontale k dalla spranga di misura sia rivolto al punto di partenza, e l'altro verticale c' verso il punto di arrivo; si pone k in contatto del punto di partenza per quanto più si può, si livella prossimamente la cassa sui cavalletti e per mezzo del teodolite, situato sulla traccia, si allinea la spranga traguardando la k. Dopo in continuazione, alla maniera stessa della prima, si pongono le casse n.° II III IV, badando sempre che le spranghe sieno in esatto allineamento, e che il cuneo dell'una non tocchi quello dell'altra: ciò fatto sulla spranga n.° I si osservi

1.° la indicazione del livello;

2.° la indicazione del cuneo geometrico tra k' ed c;

3.° la indicazione del cuneo geometrico tra le spranghe n.° I e n.° II;

4.° Si misuri con una scala adattata la distanza tra il punto di partenza ed il cuneo k della spranga n.° I, se tale distanza esiste.

Sulla spranga n.° II si osservi

1.° la indicazione del livello;

2.° la indicazione del cuneo geometrico tra k' e c;

3.° la indicazione del cuneo geometrico tra le spranghe II e III.

Si proceda poi per le altre spranghe allo stesso modo, avendo cura di ripetere le letture. In seguito si tolga dal suo sito la cassa n.° I e si ponga in continuazione della IV, e si faccia lo stesso per la II, e III, e si ripeta il procedimento medesimo e così via: badando che quando si è in fine della misura lo strumento che serve all'allineamento bisogna piantarlo in altro sito donde avere una visione distinta.

Noi sin quì abbiamo conosciuto l'apparato di Bessel ed il modo di usarlo, ma non è questa la parte essenziale di quanto bisogna sapere per venire a capo di un lavoro quale

è la misura di una base. Epperò noi verremo discorrendo questa teoria in modo bastevole a vedere la via senza impacci.

§. 18. Se si ammette che il ferro e lo zinco si dilatino proporzionalmente, ad ogni temperatura le variazioni dello spazio $k'c$ misurato dal cuneo saranno proporzionali a quelle della spranga di misura. Di fatto supponiamo l la lunghezza della spranga di ferro alla temperatura 0°, α il suo coefficiente di dilatazione lineare; l' ed α' le corrispondenti quantità per lo zinco; l'espressione $(l\alpha - l'\alpha')t = v$ indicherà lo spazio $k'c$, o termometro metallico misurato dal cuneo geometrico alla temperatura t. Che se questa diviene t', lo spazio $k'c$ diverrà $(l\alpha - l'\alpha')\, t' = v'$, e quindi sarà $\frac{v}{v'} = \frac{t}{t'}$. D'altronde noi abbiamo assunto che il ferro subisce dilatazioni proporzionali alle temperature, adunque se i cambiamenti di stato della spranga di misura sono V e V' alle temperature t e t', si avrà ancora $\frac{V}{V'} = \frac{t}{t'}$ epperò $\frac{V}{V'} = \frac{v}{v'}$ cioè come dicevamo avanti le variazioni dello spazio $k'c$ misurato dal cuneo, sono proporzionali a quelle della spranga kc. Se ora pongasi l'ultima equazione sotto la forma $V' = \frac{V}{v} v'$, e si faccia $\frac{V}{v} = -m$ (ove ad m si dà il segno negativo per la ragione che or vedremo) sarà

$$V' = -mv' \cdots \qquad (2)$$

che se s'indichi con l la lunghezza della spranga corrispondente alla lettura a del cuneo, con λ quella corrispondente alla lettura 0, sarà $\lambda > l$, poichè la diminuzione dello spazio misurato dal cuneo ha luogo per la dilatazione dello zinco maggiore di quella del ferro, ed in questo caso, ponendo $\lambda - l$ in vece V' e $0 - a$ in vece di v', l'equazione (2) diverrà $\lambda - l = -m(0 - a)$, ossia $\lambda - l = am$, ed $l = \lambda - am$: ove se ad m si fosse dato il segno generale, l'equazione $\lambda - l = -am$ ci avrebbe indicato dover essere m una quantità negativa.

Ora per ciascuna spranga ha luogo una equazione della forma

$l = \lambda - am$, se dunque distinguiamo per gli apici l'equazione corrispondente a ciascuna delle 4 spranghe, si avrà:

per la spranga N.° $\begin{cases} \text{I} \ldots l' = \lambda' - am' \\ \text{II} \ldots l'' = \lambda'' - bm'' \\ \text{III} \ldots l''' = \lambda''' - cm''' \\ \text{IV} \ldots l^{iv} = \lambda^{iv} - dm^{iv} \end{cases}$ (3)

e fatto $\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{iv} = 4\ \text{L}$ (4),

$$\begin{cases} \lambda' = \text{L} + x' \\ \lambda'' = \text{L} + x'' \\ \lambda''' = \text{L} + x''' \\ \lambda^{iv} = \text{L} + x^{iv} \end{cases} \quad (5)$$

col sostituire nelle equazioni (3) i valori λ tratti dalle (5), si avranno le equazioni

$$\begin{cases} l' = \text{L} + x' - am' \\ l'' = \text{L} + x'' - bm'' \\ l''' = \text{L} + x''' - cm''' \\ l^{iv} = \text{L} + x^{iv} - dm^{iv} \end{cases} \quad (6)$$

nelle quali, se noi avremo modo di conoscere le x, le m ed L, potremo dedurre le l: ossia in altri termini, quando le quantità ora espresse sieno note, siamo in istato di ottenere la lunghezza di una spranga corrispondente ad una lettura di cuneo. Per indicare poi in qual maniera le quantità sopraindicate possono determinarsi, è necessario descrivere gli apparati di cui si è servito Bessel.

§. 19. Il primo di essi si costituisce *(fig.ª 19.)* di un parallelepipedo vuoto *ff*, di vecchio legno, e poco più lungo di 2T, il quale, onde non sia soggetto a flessione, vien sostenuto da un congegno di traverse *gg hh*.

Alle due estremità di *ff* giacciano saldi due telarini di ottone; ognuno dei quali *(fig.ª 20.)* ha sopra un cuneo orizzontale di acciaio *q* che è fisso, ed un cilindro anche di acciaio *ab*, che è scorrevole in una scanalatura.

Ora per la disposizione de' telarini i due cilindri si muovono precisamente sulla retta orizzontale che costituisce il loro asse comune [1], e ciascuno di essi ha la base *b*, rivolta

[1] Verrà indicato il modo di ridurre i cilindri allo stesso asse.

al cilindro opposto, conformata a calotta sferica; l'altra base a, rivolta al cuneo q, cuneiforme, e tale che può disporsi verticalmente mediante un buchetto segnato sulla staffa s con cui si allinea.

Tutto l'apparato ff vien sostenuto da due cavalletti resi stabili da pesi ed isolati dal suolo in cui si muove l'osservatore; i quali possono procurare ad ff la posizione orizzontale. Supponiamo poi volersi paragonare le 4 spranghe di misura: per fare ciò bisogna porre sull'apparato ad una ad una ciascuna cassa contenente la spranga; situare la spranga di maniera che il suo asse si confonda con quello dei cilindri [1]; procurare che questi abbiano la base b a contatto della spranga; e finalmente misurare col cuneo geometrico lo spazio aq. È evidente che questa operazione ripetuta sulle quattro spranghe darà un paragone della loro lunghezza; però bisogna avvertire che tutto ciò presume la temperatura essere la stessa durante il paragone; ma se anche variasse alcun poco, l'influenza sarà trascurabile [2] quando nello sperimentare le spranghe si tiene l'ordine di successione seguente **I II III IV, IV III II I.**

§. 20. Ora chiamiamo L + C la differenza tra la distanza

[1] Per eseguire questa operazione tuttaddue i cilindri si rivolgono al contrario nella propria scanalatura; si accostano alla spranga quasi a toccarla; e si girano sull'asse, finchè i tagli delle loro estremità giacciano nei rispettivi piani dei tagli opposti della spranga: in tale postura si procuri il parallelismo relativo dei tagli; poichè quando ciò ha luogo l'asse della spranga si confonderà con quello de' cilindri. Ciò è facile a comprendersi richiamato a mente che la spranga ha un estremo a taglio orizzontale, e l'altro a taglio verticale.

[2] Si deve possibilmente procurare che la stanza di sperimento sostenga una temperatura equabile; che se ciò non può ottenersi a rigore, ammettasi che essa vada leggermente crescendo o diminuendo. Ora indichiamo con D la distanza tra i cunei fissi q e q' nell'istante medio del paragone, cioè tra il finire dello sperimento n.° IV ed il cominciare di nuovo lo stesso sperimento, ed esprimiamo con $\pm K$ l'accrescimento di D per ogni paragone, certamente la quantità D al primo paragone della spranga n.° I sarà stata $D \mp 3,5K$, e nell'ultimo paragone della I sarà $D \pm 3,5K$; quindi nel medio di questi due valori K sparisce. Si può dire lo stesso per le altre spranghe, e conchiudere che, ammesso quest'ordine di sperimento ed un accrescimento o diminuzione costante di temperatura, l'influenza di questa si annulla usando i termini medii.

ignota dei cunei fissi q e q', e la somma anche ignota delle altezze de' cilindri; ed indichiamo con n', n'', n''', n^{iv} le letture riunite de' due cunei corrispondenti alle lunghezze l', l'', l''', l^{iv} delle 4 spranghe e si avranno le equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} l' = L + C - n' \\ l'' = L + C - n'' \\ l''' = L + C - n''' \\ l^{iv} = L + C - n^{iv} \end{array}\right. \qquad (7)$$

le quali coll'aiuto delle (6) permettono l'eliminazione delle l ed L, sicchè risultano le equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} n' = C - x' + am' \\ n'' = C - x'' + bm'' \\ n''' = C - x''' + cm''' \\ n^{iv} = C - x^{iv} + em^{iv} \end{array}\right. \qquad (8)$$

ove le incognite sono la C, le x, e le m. Che se diamo un'occhiata alle equazioni (4) e (5) si vedrà essere $x' + x'' + x''' + x^{iv} = 0$; adunque per questa equazione può eliminarsi una delle x, ed avere nelle 4 equazioni (8), oltre della C, 7 incognite cioè 3 x e 4 m, le quali possono determinarsi facendo molti paragoni simili sulle stesse spranghe a diverse temperature. Bessel ha eseguito sulle sue spranghe 9 paragoni di cui una parte prima e l'altra dopo la misura della base, quindi ha ottenuto 36 equazioni della forma seguente:

$$1.^\circ \text{ paragone} \left\{\begin{array}{l} 3^l,9603 = C^{(1)} - x' + 1^l,8960\, m' \\ 3\,,3600 = C^{(1)} - x'' + 1\,,9957\, m'' \\ 3\,,4875 = C^{(1)} - x''' + 1\,,3387\, m''' \\ 3\,,4506 = C^{(1)} - x^{iv} + 1\,,3377\, m^{iv} \end{array}\right.$$

$$2.^\circ \text{ paragone} \left\{\begin{array}{l} 3^l,6480 = C^{(2)} - x' + 1\,,3124\, m' \\ 3\,,0075 = C^{(2)} - x'' + 1\,,3636\, m'' \\ 3\,,7950 = C^{(2)} - x''' + 1\,,8752\, m''' \\ 3\,,7864 = C^{(2)} - x^{iv} + 1\,,9205\, m^{iv} \end{array}\right.$$

Gli altri paragoni li riporteremo in seguito, giacchè i calcoli, i quali si riferiscono alla teoria di compensazione, li trasmetteremo in ultimo, affin di non interrompere il ragio-

namento ; adunque ci contenteremo di riportare qui i soli risultamenti finali ottenuti da Bessel che sono

$x' = -0^{l},3015$	$m' = 0^{l},54033$	$C^{(1)} = 2^{l},6444$	$C^{(5)} = 2^{l},1669$	
$x'' = +0,3986$	$m'' = 0,55976$	$C^{(2)} = 2,6422$	$C^{(6)} = 2,0408$	
$x''' = -0,0713$	$m''' = 0,57575$	$C^{(3)} = 2,61705$	$C^{(7)} = 2,3950$	(9)
$x^{iv} = -0,0258$	$m^{iv} = 0,58103$	$C^{(4)} = 2,3110$	$C^{(8)} = 2,3995$	
			$C^{(9)} = 2,46655$	

Ricavati i valori delle x e delle m, ci resta a conoscere quello di L, onde per mezzo delle (6) si possano dedurre le l. Il procedimento per conoscere L è il seguente.

§. 21. Per semplicità supponiamo dapprima che si abbia una doppia tesa campione adattata su di un letto di carrucole presso a poco simile a quello delle spranghe, onde non soffra flessione; in tale caso l'operazione si riduce a paragonare la doppia tesa ad una delle spranghe per mezzo del comparatore già descritto. Adunque vogliasi paragonare la doppia tesa alla spranga n.° I: si sottoponga al comparatore la spranga I e dia la somma della lettura di cunei uguale ad n', sarà $l' = L + C - n'$; si sottoponga al comparatore la doppia tesa, la quale supponiamo che abbia la lunghezza 2T, e dia la somma della lettura dei cunei uguale ad n, sarà parimente $2T = L + C - n$; quindi eliminato tra queste equazioni $L + C$, sarà $l' + n' = 2T + n$; ma noi abbiamo che $l' = L + x' - am'$, dunque sarà

$$L = 2T - x' + am' + n - n' \quad (10):$$

equazione la quale offre il valore di L; giacchè n, n', x', m' sono tutte quantità note, e 2T può anche considerarsi tale per la ragione che, conoscendosi la lunghezza del campione alla temperatura normale, si può dedurre quella che esso ha nello istante della sperienza. Ora noi abbiamo supposto di avere a disposizione una doppia tesa campione; ma il caso più ovvio è che si abbia in vece la tesa, ed allora il procedimento a tenersi sarà il seguente, adoperato dallo stesso Bessel.

§. 22. Egli ha fatto costruire un letto di ferro *pp* (*fig.*ª *21.*) lungo poco più di due tese, e fornito di due scanalature longitudinali a guisa di rotaie, le quali servono al transito di quattro paja di rotelle *cc*, destinate a sostenere su i loro

assi la tesa T, ed a trasportarla pel verso della sua lunghezza. Nel mezzo del letto v'ha una piastra di ottone *abcd* che tiene due piccoli cilindri di acciaio *h*, *h'*, i quali hanno l'asse comune, e le basi opposte a calotta sferica; possono poi aver movimento secondo la lunghezza; esser fermati per due viti *k*, e togliersi se bisogna. S'immagini questo congegno situato sul comparatore: se tolto il cilindro *h'* si pone un estremo della tesa a contatto di *h*, il cilindro del comparatore, che è a dritta, a contatto dell'altro estremo della tesa, e si misura l'intervallo tra i cunei del comparatore; dappoi al luogo della tesa situato il cilindro *h'* a contatto di *h*, e questo tolto si ripete la stessa operazione dalla parte opposta; egli è chiaro da non abbisognarvi dimostrazione che con questo procedimento si ottiene l'espressione $2T+C-n$ avuta avanti, ove *n* esprime al solito la somma degl'intervalli misurati col cuneo. Ora deve osservarsi che le operazioni indicate per essere esatte abbisognano delle seguenti condizioni:

1.° che il contatto dei cilindri *h*, *h'* sia sul loro asse comune:

2.° che l'asse de'suddetti cilindri sia lo stesso di quello del comparatore:

3.° che gli assi delle rotelle sostenenti la tesa sieno nello stesso piano:

4.° che le viti *k* nello stringersi non spostino i cilindri.

È facil cosa vedere se la prima condizione ha luogo; poichè aperte le viti dei cilindri *h* ed *h'*; situati questi colle basi curve a contatto, e messo un microscopio in direzione conveniente, si può muovere uno di essi intorno all'asse e vedere se il punto di contatto rimane fermo o gira: nel primo caso i punti di tangenza sono sull'asse comune.

La seconda condizione può vedersi se ha luogo nel seguente modo: si toglie il cilindro *h'*, e si vede se sull'altro *h* capita esattamente nel mezzo della base l'immagine del cilindro del comparatore il quale è a dritta; e reciprocamente, poichè se ciò si verifica si dev'esser certo che questi due cilindri hanno lo stesso asse. L'operazione stessa si ripete poi tra il cilindro *h'* e quello del comparatore che è a sinistra.

La terza condizione può scorgersi per mezzo di una corda di minugia bene tesa, la quale dovrebbe toccare tutti gli assi delle rotelle.

L'ultima può osservarsi per mezzo di un microscopio.

Ci resta ora a dire qualcosa sul modo di usare la tesa campione, onde eseguire le operazioni sopra indicate.

§. 23. Mille fatti comprovano che il termometro a mercurio, per effetto dell'ambiente atmosferico, non segna esattamente la temperatura interna del corpo su cui si adatta. Questa è una difficoltà grave nel caso nostro; dappoichè non ottenendo l'interna temperatura della tesa nel tempo del paragone, non può aversene la sua vera lunghezza. Ora Bessel dopo molti inutili tentativi ha risoluto tale difficoltà nel modo seguente. Egli ha immerso nell'acqua la tesa fornita di termometri, e ve l'ha fatta restare per lungo tempo, acciò la sua temperatura interna si equilibrasse coll'esterna e fosse quella segnata dai termometri; dappoi tolta la tesa dall'acqua ed avvoltala prima con panni fini di lana, e dopo con panni più doppii per impedire l'evaporazione, l'ha sottoposta allo sperimento lasciando scoperto solo le scale termometriche. Con questo modo di operare egli ha ottenuto, non solo che la temperatura dei termometri fosse la stessa della interna della tesa, ma pure che la temperatura rimanesse costante; dappoichè nello spazio di 2 minuti, tempo necessario allo sperimento, i termometri molto sensibili, i quali accompagnavan la tesa, non cambiarono più di 0,° 2 F:, ed è naturale supporre che la tesa sia rimasta anche più costante. Egli fece così 12 paragoni in giorni di elevata temperatura, ponendo sempre sull'apparato prima la tesa, dopo la spranga N I e poi di nuovo la tesa. Noi riportiamo uno di tali paragoni per esempio:

		F	2 T	n ed n'	a
1834	Tesa [1]	65°,495	1728^l,0468	3,3709	
26 Giugno	N 1	......	....	3,3331	1^l, 3706
	Tesa	65 ,395	1728 ,0456	3,3605	

Con questo mezzo, siccome $L=2T+n-n'-x'+am'$, se aggiungesi a ciascun dei due valori di 2T la quantità nota $n-n'$ e se ne prende il medio, si ha l'equazione $L=1728^l,0788-x'+1^l,3706\,m'=1729^l,1208$, giacchè x' ed m' sono quantità determinate avanti.

Dai 12 paragoni di Bessel si deduce il presente quadro,

1	$L=1728^l,0787-x'+1^l,3706m'=1729^l,1208$
2	$= \quad ,0766-x'+1\,,3663m'= \quad ,1161$
3	$= \quad ,0814-x'+1\,,3640m'= \quad ,1199$
4	$= \quad ,0814-x'+1\,,3605m'= \quad ,1180$
5	$= \quad ,0853-x'+1\,,3475m'= \quad ,1149$
6	$= \quad ,0883-x'+1\,,3473m'= \quad ,1178$
7	$= \quad ,0922-x'+1\,,3465m'= \quad ,1213$
8	$= \quad ,0891-x'+1\,,3478m'= \quad ,1189$
9	$= \quad ,0413-x'+1\,,4258m'= \quad ,1132$
10	$= \quad ,0455-x'+1\,,4217m'= \quad ,1152$
11	$= \quad ,0455-x'+1\,,4189m'= \quad ,1137$
12	$= \quad ,0428-x'+1\,,4171m'= \quad ,1100$
medio	$=1728\,,0707-x'+1\,,3778m'=1729,1167$

dal quale si rileva che nel medio $L=1729^l,\ 1167$: valore

[1] La tesa di Bessel, ricavata da quella del Perù, è lunga $863^l,9992$ a 13°R, temperatura a cui la tesa peruviana è lunga 864^l; in oltre la sua dilatazione per ogni grado centigrado è $L=0,00001167$, dunque su tali elementi può trovarsene la lunghezza ad una temperatura qualunque. In effetti se la tesa in parola a 16°,25 C (=13°R) ha la lunghezza $863^l,9992$; a 65°,495 F (=18°,6083C) sarà $863^l,9992+2,3583\times0,00001167\times864$, $2T=1728,0461$. ed a 65°,395 F (=18°,5528C) sarà $863,9992+2.3028\times0,00001167\times864$. $2T=1728,0451$.

che introdotto nelle equazioni (6), ci offre i risultamenti qui notati in corrispondenza delle letture del termometro metallico:

$$\begin{aligned} &\text{N.° I} \ldots l' = 1728^l,8152 - 0^l,54033 \times a \\ &\text{N.° II} \ldots l'' = 1729\,,5153 - 0\,,55976 \times b \\ &\text{N.° III} \ldots l''' = 1729\,,0454 - 0\,,57575 \times c \\ &\text{N.° IV} \ldots l^{iv} = 1729\,,0909 - 0\,,58103 \times d \end{aligned} \quad (11)$$

di maniera che da ora in avanti possiam dedurre la lunghezza normale della spranga dalla semplice lettura del termometro metallico.

§. 24. Nella descrizione dell'apparato, semplicemente indicavamo non esser necessario che ciascuna spranga nell'atto della misura abbia rigorosamente la posizione orizzontale; poichè per mezzo del livello, di cui va fornita, può apprezzarsene l'inclinazione e proiettarsi poi all'orizzonte: ora convien parlare di ciò sviluppatamente.

Noi sappiamo dalla trigonometria che nel triangolo rettangolo abc (*fig.ª 22.*) se sono note le grandezze ac, ab si avrà l'angolo i dalla relazione sen $i = \frac{ab}{ac}$. Se dunque conosciamo la lunghezza ac della spranga di misura, e la quantità ab per cui il suo estremo a si solleva sull'altro b, possiamo dedurre la inclinazione i. Ora, rammentando che il livello ha verso uno degli estremi una vite che ne allunga od accorcia il braccio corrispondente, supponiamo sapersi 1.°) che la spranga è parallela all'asse del livello, quando la testa di vite indica sulla scala il numero di giri S: 2.°) che per un sol giro di vite un estremo della spranga si abbassa od innalza sull'altro della quantità nota q.

Ciò posto fingiamo la spranga in tale posizione che, per ridursi la bolla in mezzo, bisogna aggiungere s giri al numero di giri S: egli è chiaro che noi con questo elemento possiamo conoscere l'inclinazione della spranga; giacchè la proporzione $1^{\text{giro di vite}} : q = s - \text{S} : ab$, ci darà $ab = q(s - \text{S})$, e fatto $ac = l$ sarà sen $i = \frac{s - \text{S}}{l} q$: laonde la cognizione precedente di S e q e l'attuale osservazione di s ed l ci

menano alla cognizione di i, la quale ci presenta una doppia utilità offerendosi 1.°) la proiezione orizzontale di l, per l'equazione $bc = l \cos i$, e man mano tutta la distanza orizzontale tra gli estremi della base; 2.°) la differenza di livello tra l'uno e l'altro estremo di l, per l'equazione $ab = l \operatorname{sen} i$, e quindi successivamente tra gli estremi della base. Qui è necessario però considerare, che quando le spranghe sono inclinate, il cuneo geometrico essendo nel piano di una di esse fa d'uopo proiettarlo all'orizzonte, come un prolungamento della spranga: adunque, chiamando n la lettura del cuneo, nel triangolo antecedente $bc = (l+n) \cos i$, ed $ab = (l+n) \operatorname{sen} i$, e quindi le due correzioni saranno:

$$\text{correzione orizzontale} = -(l+n)(1-\cos i)$$

$$\text{correzione verticale} = -(l+n)\operatorname{sen} i \quad ,$$

e per tali formole noi potremmo ottenere, come dicevamo avanti, la proiezione orizzontale della base, e la differenza di livello de' suoi estremi. Se vogliamo però dare a queste una migliore forma, riflettiamo che i è un angolo non maggiore di un paio di gradi e può assumersi $\operatorname{sen} \frac{1}{2} i = \frac{1}{2} \operatorname{sen} i$; sarà dunque $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 i$, e $\cos i = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i$, ove sostituendo a $\operatorname{sen} i$ il suo valore $\frac{s-S}{l} q$, si avranno le due formole

$$\text{correzione orizzontale} = -\frac{(l+n)q^2}{2l^2}(s-S)^2$$

$$\text{correzione verticale} = -\frac{(l+n)q}{l}(s-S) \quad ;$$

nelle quali si può senza errore ad $\frac{l+n}{l}$ sostituire un valore costante derivato dai medii delle l e delle m, onde si avrà in fine, distinguendo cogli apici le diverse spranghe,

$$\left.\begin{array}{l} \log(\text{cor.}^{ne}\ \text{oriz.}^{le}) \left\{ \begin{array}{l} = \log A' + 2\log(s' - S') \\ = \log A'' + 2\log(s'' - S'') \\ = \log A''' + 2\log(s''' - S''') \\ = \log A^{iv} + 2\log(s^{iv} - S^{iv}) \end{array} \right. \\ \log(\text{cor.}^{ne}\ \text{ver.}^{le}) \left\{ \begin{array}{l} = \log A_1 + \log(s' - S') \\ = \log A_2 + \log(s'' - S'') \\ = \log A_3 + \log(s''' - S''') \\ = \log A_4 + \log(s^{iv} - S^{iv}) \end{array} \right. \end{array}\right\} \quad (12)$$

§. 25. Il modo poi di ottenere S è molto facile; dappoichè si pone la spranga sul comparatore, si riduce la bolla in mezzo e si legge la vite; dopo s' inverte la posizione della spranga, si reca la bolla in mezzo e si legge di nuovo la testa della vite: la semisomma delle due letture darà S. Di fatti sieno *ca* (*fig.*ª *23.*) la spranga inclinata; *cd ab*, perpendicolari a *ca*, le braccia del livello *db* che soprastante alla spranga ha la bolla in mezzo, ed esprima *ab* l'altezza della testa di vite. Se invertiamo la posizione della spranga, *ab* e *cd* divengono rispettivamente *ce* ed *af*, *ef* sarà la nuova posizione del livello, il quale ridotto colla bolla in mezzo diverrà *gf*, e quindi *cg* esprimerà l'altezza della testa di vite. Ora essendo *cd* uguale e parallela ad *af*, sarà *df* parallela a *ca*, epperò se $\frac{ab+cg}{2}$ ($=$S) è uguale a *cd*, l'asse del livello è parallelo alla spranga; ma tali quantità sono effettivamente uguali; giacchè

$$\frac{ab+cg}{2}=\frac{af+fb+cg}{2}=\frac{af+gd+cg}{2}=\frac{af+cd}{2}=cd,$$

dunque il numero di giri S indica la posizione in cui l'asse del livello è parallelo alla spranga, ed s—S il numero di giri che deve subire il livello, perchè il suo asse e quindi la spranga sieno orizzontali.

Quanto poi alla ricerca di q il procedimento è questo. Si pone una esatta scala in posizione verticale vicino all'estremo della spranga, si muove la vite del livello da sollevarlo per un numero di parti intiere h della scala, tenendo conto del numero k di giri che la vite ha eseguito; egli è chiaro che $q=\frac{h}{k}$. Si osservi poi che tali operazioni vanno ripetute molte fiate, onde ottenere un valore abbastanza esatto; anzi sarà cosa buona di eseguirle prima di misurar la base e dopo misurata.

Nell'apparato di Bessel i valori di S e di q corrispondevano come si vede dal seguente quadro:

Spranghe.	Giri di vite		S	Altezza	q
	intieri	parti			
I	11	35,64	$=S'$	7',750	$=q'$
II	11	37,89	$=S''$	7 ,598	$=q''$
III	10	2,96	$=S'''$	7 ,768	$=q'''$
IV	10	8,06	$=S^{iv}$	7 ,957	$=q^{iv}$

§. 26. In tutto ciò che si è detto abbiamo tenuto sempre come esatte per costruzione e come note le parti, che dà il cuneo geometrico; ma è necessario di sottoporre anche ciò ad una verificazione; ed ecco al proposito il procedimento di Bessel. Si pone una scala esatta secondo il lato di un cilindro del comparatore, dalla parte del cuneo fisso, e vi si ferma; si pone un microscopio a micrometro in direzione di una divisione della scala, e poi bel bello tra il cuneo fisso ed il cilindro si va intromettendo il cuneo geometrico da verificarsi: il cilindro per l'azione di questo va gradatamente allontanandosi dal cuneo fisso trasportando seco la scala; in conseguenza dei transiti della scala veduti nel microscopio si deducono le parti misurate dal cuneo sottoposto a verificazione. Bessel per questa ricerca ha usato una scala di ottone divisa di 0',2 in 0',2: egli ha fatto cadere dapprima la croce dei fili del microscopio successivamente sulle divisioni della scala 0',8; 1',0; 1',2··· sino a 2',0 ed ha fatto le letture corrispondenti del cuneo; di poi ha fatto cadere la croce de' fili sulle divisioni della scala 0',2; 0',4··· ed ha praticato lo stesso, e quindi ha dedotto che uno de'suoi cunei aveva questi errori di divisione

Divisioni del cuneo.	Errori.
0,8	—0',000056
1,0	—0 ,000044
1,2	—0 ,000030
1,4	—0 ,000025
1,6	—0 ,000008
1,8	+0 ,000003
2,0	+0 ,000018

§. 27. Per rendere pratiche le idee sin ora esposte stimiamo utile di togliere ad esempio la base misurata da Bessel, onde far vedere il modo di calcolarne la lunghezza e la proiezione. L'anzidetta base si estende tra due punti *(fig.ª 24.) Trenk* e *Mednicken*, ed ha un punto di fermata A, alquanto più prossimo a Trenk. Bessel ha eseguito tale misura procedendo due volte da T verso A, ed altrettanto ha praticato da A verso M. Nel principiarsi la misura del tratto TA l'estremità dell'apparato non potè situarsi a piombo di T; quindi con una riga di ferro fu misurata la distanza della prima spranga da T, misura che fu 1^{pd} alla temperatura di 13.°,3R, e che diviene 144',001 alla temperatura normale di 13.°R, cui trovasi ridotta ogni spranga. Anche in A v'ha una frazione di +34',462 misurata con una scala. Nel ripetere lo stesso tratto TA, v'ha in T 1^{pd} alla temperatura di 13.°,7R = 144'001 alla temperatura normale, ed in A la frazione +48',407. Nella misura poi del tratto AM v'ha in M la lunghezza di +1657',128 misurata colla riga di ferro alla temperatura di 23.°,8R, quantità che diviene 1657',389; e nella ripetizione dello stesso tratto in A v'ha la frazione —34',462, in M l'altra +80',411. Deve oltre a ciò osservarsi che nel tratto AT la spranga I venne impiegata 29 volte, e le altre 28. Ora rammentiamo che $l'=\lambda'-am'$; che ogni volta lo spazio misurato da una spranga dev'esser diminuito della riduzione all'orizzonte ed accresciuto dell'intervallo tra la spranga stessa e la contigua, e comprenderemo come $29\lambda'-R-Am+S$ esprimerà lo spazio orizzontale esatto misurato dalle 29 spranghe N.° I, se facciasi R= alle riduzioni all'orizzonte, S= agl'intervalli tra le due spranghe, ed A = ai termometri metallici. Applicato poi lo stesso principio alle altre spranghe, come pure all'altro tratto AM ci saranno chiari i quadri seguenti:

1.ª *Misura da Trenk verso* A

λ	R	Am	S	Ossevazioni
$+29\lambda'$	$-11^{l},955$	$-37^{l},3745m' = -20^{l},194$	$+\ 36^{l},9145$	$+1^{rd}$ a principio alla temperatura di 13°,3R. $+34^{l},462$ alla fine.
$+28\lambda''$	$-13\ ,867$	$-38\ ,8880m'' = -21\ ,768$	$+\ 36\ ,7315$	
$+28\lambda'''$	$-13\ ,714$	$-36\ ,6505m''' = -21\ ,102$	$+\ 34\ ,4260$	
$+28\lambda^{iv}$	$-11\ ,614$	$-37\ ,9705m^{iv} = -22\ ,062$	$+\ 35\ ,5025$	
	$-51\ ,150$	$-85\ ,126$	$+143\ ,\ 575$	

2.ª *Misura da Trenk verso* A

λ	R	Am	S	Osservazioni
$+29\lambda'$	$-13^{l},786$	$-38^{l},6630m' = -20^{l},890$	$+\ 35^{l},530$	1^{rd} alla temperatura di 13°,7R. $+48^{l},407$ alla fine.
$+28\lambda''$	$-13\ ,241$	$-40\ ,1945m'' = -22\ ,499$	$+\ 32\ ,910$	
$+28\lambda'''$	$-13\ ,868$	$-37\ ,9365m''' = -21\ ,843$	$+\ 32\ ,046$	
$+28\lambda^{iv}$	$-11\ ,586$	$-39\ ,3050m^{iv} = -22\ ,837$	$+\ 32\ ,779$	
	$-52\ ,431$	$-88\ ,069$	$+133\ ,265$	

1.ª *Misura da A verso Mednicken*

λ	R	Am	S	Osservaz.
$+88\lambda'$	$-20^{l},307$	$-103^{l},979m' = -\ 56^{l},184$	$+142^{l},565$	si è partito esattamente da A. Alla fine $+1657',128$ alla temperatura di 23°, 8R.
$+89\lambda''$	$-22\ ,563$	$-114\ ,569m'' = -\ 64\ ,131$	$+139\ ,145$	
$+88\lambda'''$	$-23\ ,796$	$-106\ ,812m''' = -\ 61\ ,498$	$+135\ ,060$	
$+88\lambda^{iv}$	$-19\ ,771$	$-112\ ,041m^{iv} = -\ 65\ ,100$	$+142\ ,003$	
	$-86\ ,437$	$-246\ ,913$	$+558\ ,773$	

2.ª *Misura da* A *verso Mednicken*

λ	R	Am	S	Osservaz.
$+88\lambda'$	$-19^{l},760$	$-103^{l},630m' = -\ 55^{l},995$	$+115^{l},7445$	$-34',462$ a principio $+80^{l},411$ alla fine.
$+89\lambda''$	$-21\ ,556$	$-113\ ,961m'' = -\ 63\ ,790$	$+110\ ,7325$	
$+89\lambda'''$	$-24\ ,080$	$-107\ ,072m''' = -\ 61\ ,647$	$+106\ ,9270$	
$+88\lambda^{iv}$	$-21\ ,809$	$-111\ ,446m^{iv} = -\ 64\ ,753$	$+110\ ,4950$	
	$-87\ ,205$	$-246\ ,185$	$+443\ ,\ 899$	

Sunto della misura Trenk—A

Misura	1.ª	2.ª
1^{pd} a principio	$+144^l,001$	$+144^l,001$
113 spranghe$=113L+x'$; $x'=$	— 0 ,301	— 0 ,301
Riduzione all'orizzonte	— 51 ,150	— 52 ,431
Termometri metallici	— 85 ,126	— 88 ,069
Spazii tra le spranghe	+143 ,575	+133 ,265
Distanza dell' ultima spranga da A	+ 34 ,462	+ 48 ,407
Somma...113L	+185 ,461	+184 ,872

Sunto della misura A—*Mednicken*

Misura	1.ª	2.ª
Distanza della prima spranga da A	$0^l,000$	— $34^l,462$
353 spranghe$=353L+x''$; $x''=$	+ 0 ,399	....
354 spranghe$=354L+x''+x'''$; $x''+x'''=$	....	+ 0 ,327
Riduzione all'orizzonte	— 86 ,437	— 87 ,205
Termometri metallici	— 246 ,913	—246 ,185
Spazii tra le spranghe	+ 558 ,773	+443 ,899
Distanza dell' ultima spranga da M	+1657 ,389	+ 80 ,411
Somma	+1883 ,211 + 353 L	+156 ,785 +354 L

Donde deriva

	1.ª	2.ª
Trenk—A	$113L+185^l,461$	$113L+184^l,872$
A—Mednicken	$353L+1883,211$	$354L+156,785$
Trenk—Mednicken	$466L+2068,672$	$467L+341,657$

Ma noi avanti abbiam veduto essere

$$L=1729^l,1167=2^t+1^l,1167,$$

dunque i due valori di sopra saranno rispettivamente...

$$934^t+861^l,054 | 934^t+863^l,156,$$

e quindi il medio delle due misure, differenti tra loro per $2^l,102$, sarà $\cdot\cdot 934^t+862^l,105=934^t,997807$.

§. 28. La distanza ottenuta deve riguardarsi poi come misurata su di una superficie parallela a quella del mare, onde

è necessario conoscerne l'altezza assoluta, affin di proiettarla. Ora Bessel per mezzo di una livellazione trigonometrica ha trovato essere

l'altezza assoluta di Trenk=17',599
idem di Mednicken=18 ,067
differenza di livello= 0 ,468

Egli ancora, mediante l'apparato, nelle due misure ha dedotto le seguenti differenze di livello

altezza di Mednicken su Trenk=0',347
idem =0 ,398 ;

dunque, tenuto conto di questi 3 valori, nel medio Mednicken si eleva su Trenk per 0',404: onde saranno

l'altezza assoluta di Mednicken corretta=18',035
quella di Trenk=17 ,631
somma...35 ,666

e sarà l'altezza media di una linea di livello distesa tra i menzionati punti..............17',833.

Or dai registri si ha che l'altezza media dalla misura eseguita è più bassa della precedente per 1',422, dunque la linea misurata si eleva sul mare di 16',411; epperò applicata la formola (1) facendo $h=16',41$, $N=3276143'$, $b=934',998$, la correzione da portarsi alla misura eseguita sarà

$$b-B=4',046=0',004683,$$

onde la base sarà $B=934',993124$.

§. 29. Cade acconcio presentemente far vedere in qual modo si determinano le costanti delle formole (12). Dalla prima delle (11) si ha $l'=1728',8152-0',54033a$: ora noi possiam ricavare un l' medio, assumendo per a il valore medio ricavato dalle misure effettive, che sono, come si rileva dai precedenti quadri....

1.ª misura...	37',375...	29	volte
2.ª » ...	38 ,663...	29	»
3.ª » ...	103 ,979...	88	»
4.ª » ...	103 ,630...	88	»
	283',647 :	234	
	1',21216=a medio		

quindi sarà

$$
\begin{array}{l}
\log.\ a \qquad =0{,}08357 \\
\log.\ 0{,}540=9{,}73266n \\
\hline
\qquad\quad 9{,}81623n \\
\qquad\ -0{,}6550 \\
\qquad 1728{,}8152 \\
\hline
\qquad 1728^{l}{,}1602=l'\ \text{medio.}
\end{array}
$$

Oltre a ciò dagli stessi quadri si rileva che le n' sono

$$
\begin{array}{lll}
1.^{a} & \text{misura}= & 36^{l}{,}915 \\
2.^{a} & \quad » \quad = & 35{,}530 \\
3.^{a} & \quad » \quad = & 142{,}565 \\
4.^{a} & \quad » \quad = & 115{,}744 \\
\hline
 & & 330{,}754\ :\ 234 \\
 & & \qquad 1^{l}{,}4134=n'\ \text{medio}
\end{array}
$$

sarà dunque $l'+n'=1729^{l},5736$; ma dal **quadro** (p. 35) si ha q' medio$=7^{l},750$; sicchè sarà

$$
\begin{array}{ll}
\log.\ (l'+n') & =3{,}23794 \\
\log.\ q' & =0{,}88933 \\
\quad » & =0{,}88933 \\
\text{Clog}\ 2 & =9{,}69897 \\
\text{Clog}\ l' & =6{,}76241 \\
\quad » & =6{,}76241 \\
\hline
 & 8{,}24039=\log.\dfrac{(l'+n')q'^{2}}{2l'^{2}}=\log.\ A';
\end{array}
$$

e praticando lo stesso riguardo ad $A''A'''A^{IV}$, e tenendo un simile procedimento quanto ad $A_1A_2A_3A_4$, si avrà in fine

$$
\begin{array}{ll}
\log.\ A' =8\cdot24039 & \log.\ A_1=0\cdot88968 \\
\log.\ A'' =8\cdot22299 & \log.\ A_2=0\cdot88105 \\
\log.\ A'''=8\cdot24231 & \log.\ A_3=0\cdot89065 \\
\log.\ A^{IV} =8\cdot26320 & \log.\ A_4=0\cdot90100
\end{array}
$$

§. 30. **Misurata la base è necessario conoscere il grado di fiducia che essa merita, od altramente il suo error medio.**

Ora, tenuto il campione come esatto, l'error medio che affetta una base deriva da questi tre fonti:

1.° dall'error che si commette paragonando le spranghe tra loro:

2.° da quello in cui si cade nel paragonare le spranghe al campione:

3.° dall'error che s'incontra nel trasportar l'apparato successivamente sul terreno.

Esaminiamo successivamente ciascuna di queste influenze per derivarne ciò che desideriamo.

Noi, parlando del confronto delle spranghe tra loro, dicemmo che Bessel ha eseguito su di esse 9 paragoni, alcuni prima altri dopo la misura della base, ed ha così ottenuto le 36 equazioni seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l} 3^{l},9693=C^{(1)}-x'+1^{l},8960m' \\ 3,3600=C^{(1)}-x''+1,9957m'' \\ 3,4875=C^{(1)}-x'''+1,3387m''' \\ 3,4506=C^{(1)}-x'^{v}+1,3377m'^{v} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 3^{l},6480=C^{(2)}-x'+1^{l},3124m' \\ 3,0075=C^{(2)}-x''+1,3636m'' \\ 3,7950=C^{(2)}-x'''+1,8752m''' \\ 3,7864=C^{(2)}-x'^{v}+1,9205m'^{v} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3,9604=C^{(3)}-x'+1,9251m' \\ 3,3541=C^{(4)}-x''+2,0248m'' \\ 2,8019=C^{(3)}-x'''+1,9360m''' \\ 3,7894=C^{(3)}-x'^{v}+1,9781m'^{v} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 3,3660=C^{(4)}-x'+1,3900m' \\ 2,7537=C^{(4)}-x''+1,5019m'' \\ 3,2065=C^{(4)}-x'''+1,4364m''' \\ 3,2056=C^{(4)}-x'^{v}+1,4955m'^{v} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3,1558=C^{(5)}-x'+1,2680m' \\ 2,5402=C^{(5)}-x''+1,3741m'' \\ 2,9924=C^{(5)}-x'''+1,3189m''' \\ 2,9962=C^{(5)}-x'^{v}+1,3825m'^{v} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 3,0172=C^{(6)}-x'+1,2570m' \\ 2,4025=C^{(6)}-x''+1,3535m'' \\ 2,8447=C^{(6)}-x'''+1,2675m''' \\ 2,8253=C^{(6)}-x'^{v}+1,3080m'^{v} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3,3148=C^{(7)}-x'+1,1374m' \\ 3,0451=C^{(7)}-x''+1,8793m'' \\ 3,1620=C^{(7)}-x'''+1,2053m''' \\ 3,4852=C^{(7)}-x'^{v}+1,8353m'^{v} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 3,6299=C^{(8)}-x'+1,7148m' \\ 2,6690=C^{(8)}-x''+1,2022m'' \\ 3,4660=C^{(8)}-x'''+1,7222m''' \\ 3,0795=C^{(8)}-x'^{v}+1,1278m'^{v} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3,7822=C^{(9)}-x'+1,8811m' \\ 3,1730=C^{(9)}-x''+1,9703m'' \\ 3,6279=C^{(9)}-x'''+1,8965m''' \\ 3,6118=C^{(9)}-x'^{v}+1,9233m'^{v} \end{array}\right. \qquad (13)$$

Oltre delle quali v'ha l'equazione $x'+x''+x'''+x'^{v}=0$, che risulta dalle (4) e (5). È poi da riflettere che ciascuno de' valori, i quali entrano nelle 4 equazioni e compongono un paragone, è un medio di varie osservazioni eseguite in diversi

giorni. Così a mo' d' esempio nelle equazioni del 1.° paragone le quantità 3,9693, 1,8960 ec. sono il medio di 3 osservazioni eseguite in diversi tempi come dal seguente quadro...

	n'	a	n''	b	n'''	c	n'^{v}	d
1832	3^{l},9686	1^{l},9010	3^{l},3587	1^{l},9997	3^{l},4859	1^{l},3456	3^{l},4435	1^{l},3349
Nov.° 9	3 ,9710	1 ,8959	3 ,3623	1 ,9974	3 ,4921	1 ,3427	3 ,4540	1 ,3402
10	3 ,9684	1 ,8910	3 ,3590	1 ,9901	3 ,4844	1 ,3279	3 ,4543	1 ,3379
medii..	3 ,9693	1 ,8960	3 ,3600	1 ,9957	3 ,4875	1 ,3387	3 ,4506	1 ,3377

§. 31. Ora per venire all' argomento noi, affin di non rompere il nesso delle idee, abbiamo avanti riportato i valori delle 17 incognite x m e C, come se l'equazioni antecedenti fossero state già risolute: ma di presente vogliam tracciare il metodo da ottenere siffatti valori, e per non lasciare un vuoto, e per derivare l'errore medio che chiediamo. Laonde rifletteremo essere le nostre equazioni della categoria di quelle, che il calcolo di compensazione indica col nome di *osservazioni mediate*; sicchè le formole adattate all'uopo saranno le seguenti:

Equazioni di condizione

$$(14)\quad \begin{aligned} 0&=n_1+a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3\ldots \\ 0&=n_2+a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3\ldots \end{aligned}$$

ecc.

Equazioni normali

$$(15)\quad \begin{aligned} 0&=[an]+[aa]y_1+[ab]y_2+[ac]y_3\ldots \\ 0&=[bn]+[ab]y_1+[bb]y_2+[bc]y_3\ldots \end{aligned}$$

ecc.

ove le n indicano i termini noti 3,9693...; le y indicano le varie incognite, cioè le C, le x e le m, le e a,b,c... esprimono i coefficienti rispettivi delle incognite. Di maniera che volendo noi dare alle equazioni (13) la forma generale (14) le disporremo come appresso:

	$r_1=0$	$s_1=0$	$n_1=3,9693$
957	$r_2=0$	$s_2=0$	$n_2=3,3600$
	$r_3=-1,3387$	$s_3=0$	$n_3=3,4875$
	$r_4=0$	$s_4=-1,3377$	$n_4=3,4506$
	$r_5=0$	$s_5=0$	$n_5=3,6480$
636	$r_6=0$	$s_6=0$	$n_6=3,0075$
	$r_7=-1,8752$	$s_7=0$	$n_7=3,7950$
	$r_8=0$	$s_8=-1,9205$	$n_8=3,7864$
	$r_9=0$	$s_9=0$	$n_9=3,9604$
248	$r_{10}=0$	$s_{10}=0$	$n_{10}=3,3541$
	$r_{11}=-1,9360$	$s_{11}=0$	$n_{11}=3,8019$
	$r_{12}=0$	$s_{12}=-1,9781$	$n_{12}=3,7894$
	$r_{13}=0$	$s_{13}=0$	$n_{13}=3,3660$
5019	$r_{14}=0$	$s_{14}=0$	$n_{14}=2,7537$
	$r_{15}=-1,4364$	$s_{15}=0$	$n_{15}=3,2065$
	$r_{16}=0$	$s_{16}=-1,4955$	$n_{16}=3,2056$
	$r_{17}=0$	$s_{17}=0$	$n_{17}=3,1558$
3741	$r_{18}=0$	$s_{18}=0$	$n_{18}=2,5402$
	$r_{19}=-1,3189$	$s_{19}=0$	$n_{19}=2,9924$
	$r_{20}=0$	$s_{20}=-1,3825$	$n_{20}=2,9962$
	$r_{21}=0$	$s_{21}=0$	$n_{21}=3,0172$
3535	$r_{22}=0$	$s_{22}=0$	$n_{22}=2,4025$
	$r_{23}=-1,2675$	$s_{23}=0$	$n_{23}=2,8447$
	$r_{24}=0$	$s_{24}=-1,3080$	$n_{24}=2,8253$
	$r_{25}=0$	$s_{25}=0$	$n_{25}=3,3148$
8793	$r_{26}=0$	$s_{26}=0$	$n_{26}=3,0451$
	$r_{27}=-1,2053$	$s_{27}=0$	$n_{27}=3,1620$
	$r_{28}=0$	$s_{28}=-1,8333$	$n_{28}=3,4852$
	$r_{29}=0$	$s_{29}=0$	$n_{29}=3,6299$
2022	$r_{30}=0$	$s_{30}=0$	$n_{30}=2,6690$
	$r_{31}=-1,7222$	$s_{31}=0$	$n_{31}=3,4660$
	$r_{32}=0$	$s_{32}=-1,1278$	$n_{32}=3,0795$
	$r_{33}=0$	$s_{33}=0$	$n_{33}=3,7822$
,9703	$r_{34}=0$	$s_{34}=0$	$n_{34}=3,1730$
	$r_{35}=-1,8965$	$s_{35}=0$	$n_{35}=3,6279$
	$r_{36}=0$	$s_{36}=-1,9233$	$n_{36}=3,6118$

ormali

x'''	$-x^{v}$	$+\ 1,8960m'$	$+\ 1,9957m''$	$+\ 1,3387m'''$	$+\ 1,3377m^{v}$
1	-1	$+\ 1,3124$	$+\ 1,3636$	$+\ 1,8752$	$+\ 1,9205$
1	-1	$+\ 1,9251$	$+\ 2,0248$	$+\ 1,9360$	$+\ 1,9781$
1	-1	$+\ 1,3900$	$+\ 1,5019$	$+\ 1,4364$	$+\ 1,4955$
1	-1	$+\ 1,2680$	$+\ 1,3741$	$+\ 1,3189$	$+\ 1,3825$
1	-1	$+\ 1,2570$	$+\ 1,3535$	$+\ 1,2675$	$+\ 1,3080$
1	-1	$+\ 1,1374$	$+\ 1,8793$	$+\ 1,2053$	$+\ 1,8353$
1	-1	$+\ 1,7148$	$+\ 1,2022$	$+\ 1,7222$	$+\ 1,1278$
1	-1	$+\ 1,8811$	$+\ 1,9703$	$+\ 1,8965$	$+\ 1,9233$
	*	$-13,7818$	*	*	*
	*	*	$-14,6654$	*	*
9	*	*	*	$-13,9967$	*
	$+9$	*	*	*	$-14,3087$
	*	$+18,9156$	*	*	*
	*	*	$+24,7764$	*	*
13,9967	*	*	*	$+22,4809$	*
	$-14,3087$	*	*	*	$+23,5885$

elle x e delle m...

$3387m'''$	$-1,3377m^{v}$
$8752m'''$	$-1,9205m^{v}$
$9360m'''$	$-1,9781m^{v}$
$4364m'''$	$-1,4955m^{v}$
$3189m'''$	$-1,3825m^{v}$
$2675m'''$	$-1,3080m^{v}$
$2053m'''$	$-1,8353m^{v}$
$7222m'''$	$-1,1278m^{v}$
$8965m'''$	$-1,9233m^{v}$

$3,57718m^{v}$
$3,57718m^{v}$
$3,57718m^{v}$
$10,73153m^{v}$
$5,49498m^{v}$ (16)
$5,95115m^{v}$
$5,66330m^{v}$
$17,69168m^{v}$

le quali risolute offrono per le x e le m i valori riportati nel § 20, donde si ricavano le C anche colà riportati, ed i rimanenti errori delle 36 equazioni che, dal sostituire i valori trovati nelle equazioni (13), risultano

$$C^{(1)}\begin{cases}+0^{l},0011\\+0,0029\\-0,0010\\-0,0031\end{cases}\qquad C^{(4)}\begin{cases}-0^{l},0024\\-0,0006\\+0,0028\\+0,0001\end{cases}\qquad C^{(7)}\begin{cases}-0^{l},0037\\+0,0033\\-0,0017\\+0,0020\end{cases}$$

$$C^{(2)}\begin{cases}+0,0048\\-0,0006\\-0,0018\\-0,0025\end{cases}\qquad C^{(5)}\begin{cases}-3,0023\\-0,0027\\+0,0052\\-0,0002\end{cases}\qquad C^{(8)}\begin{cases}-0,0023\\+0,0048\\-0,0036\\+0,0011\end{cases}$$

$$C^{(3)}\begin{cases}-0,0017\\-0,0022\\+0,0012\\+0,0027\end{cases}\qquad C^{(6)}\begin{cases}+0,0043\\-0,0027\\-0,0028\\+0,0013\end{cases}\qquad C^{(9)}\begin{cases}+0,0022\\-0,0022\\+0,0019\\-0,0019\end{cases}$$

E poichè la somma dei quadrati di tali errori è...0,00024939, e le incognite sono di fatto al numero di 16, l'error medio delle 36 equazioni sarà $\sqrt{\dfrac{0,00024939}{36-16}}=0^{l}003531$.

§. 32. Qui pervenuti cominciamo dal determinare l'influsso che esercita sulla base l'error commesso nel paragonare le spranghe tra loro, e rammentiamo al proposito che la 1.ª misura del tratto Trenk—A è stata

$$\begin{gathered}29\lambda'+28(\lambda''+\lambda'''+\lambda'^{v})\\-(37^{l},3745m'+38^{l},887m''+36^{l},6505m'''+37^{l},9705m'^{v})\\-51^{l},150+143^{l},575+144^{l},001+34,462\end{gathered}$$

e che la 2.ª misura dello stesso tratto è stata

$$\begin{gathered}29\lambda'+28(\lambda''+\lambda'''+\lambda'^{v})\\-(38^{l},663m'+40^{l},1945m''+37^{l},9365m'''+39^{l},305m'^{v})\\-52^{l},431+133^{l},265+144^{l},001+48^{l},407\,;\end{gathered}$$

quindi nel medio la distanza Trenk—A è

$$\begin{gathered}29\lambda'+28(\lambda''+\lambda'''+\lambda'^{v})\\-38^{l},019m'-38^{l},541m''-37^{l},294m'''-38^{l},638m'^{v}+272',065.\end{gathered}$$

Facendo lo stesso ragionamento sulla distanza A—Mednicken, essa si troverà

$$\begin{gathered}88\lambda'+89\lambda''+88\lambda'''+88\lambda'^{v}\\-103^{l},805m'-114^{l},265m''-106^{l},942m'''-111^{l},744m'^{v}\\+1266^{l},164\,;\end{gathered}$$

epperò l' intiera distanza Trenk—Medunicken sarà

$$117\lambda'+117\lambda''+116,5\lambda'''+116\lambda^{iv}$$
$$-141^{l},824m'-153^{l},806m''-144^{l},236m'''-150^{l},382m^{iv}$$
$$+1538^{l},229.$$

Ove se alle λ si sostituiscono i loro valori tratti dall' equazione (5), e poi ad L il suo valore ricavato dall' equazione

$$L=1728^{l},0707-x'+1,3778m' \quad ,$$

si ottiene l' espressione

$$-349,5x'+117x''+116,5x'''+116x^{iv}$$
$$+500^{l},980m'-153^{l},806m''-144^{l},236m'''-150^{l},382m^{iv}:$$

di cui trovato l'error medio sapremo l'influenza, che l'errore di paragone delle spranghe esercita sulla base.

Ora il calcolo di compensazione c' insegna che se le incognite $y_1 y_2 y_3 \ldots$ risultano dalle equazioni

$$0=[an]+[an]y_1+[ab]y_2+[ac]y_3+\text{ ec:}$$
$$0=[bn]+[ab]y_1+[bb]y_2+[bc]y_3+\text{ ec:}$$
$$\text{ec. ec.}$$

e si cerca l' error medio di una funzione

$$u=\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3+\text{ ec.}$$

delle stesse incognite, esso si ottiene per la formola

$$mm=\alpha y'_1+\beta y'_2+\gamma y'_3+\text{ ec.}$$

ove $y'_1, y'_2, y'_3 \ldots$ sono grandezze che soddisfano all' equazioni

$$\alpha=[aa]y'_1+[ab]y'_2+[ac]y'_3+\text{ ec.}$$
$$\beta=[ab]y'_1+[bb]y'_2+[bc]y'_3+\text{ ec.}$$
$$\text{ec. ec.}$$

applichiamo questo principio al caso presente, nel quale

$$u=-349,5x'+117x''+116,5x'''+116x^{iv}$$
$$+500^{l},980m'-153^{l},806m''-144^{l},236m''-150^{l},382m^{iv}$$

e le x e le m soddisfano alle equazioni (16), ed avremo che

$$mm=-349,5x'_1+117x''_1+116,5x'''_1+116x^{iv}_1$$
$$+500^{l},980m'_1-153,806m''_1-144,236m'''_1-150^{l},382m^{iv}_1$$

ove i valori di x'_1, $x''_1 \ldots m'_1$, $m''_1 \ldots$ si ottengono per mezzo delle seguenti equazioni

$$\left.\begin{array}{rl}
-349,5 = & 9x'_1 -10,33635m'_1+3,66635m''_1+3,49918m'''_1+3,57718m^{iv}_1 \\
+117 = & 9x''_1+3,44545m'_1-10,99905m''_1+3,49918m'''_1+3,57718m^{iv}_1 \\
+116,5 = & 9x'''_1+3,44545m'_1+3,66635m''_1-10,49753m'''_1+3,57718m^{iv}_1 \\
+116 = & 9x^{iv}_1+3,44545m'_1+3,66635m''_1+3,49918m'''_1-10,73153m^{iv}_1 \\
+500,980 = & -13,7818x'_1+16,43670m'_1-5,72705m''_1-5,46998m'''_1-5,49498m^{iv}_1 \\
-153,806 = & -14,6654x''_1-5,72705m'_1+18,58290m''_1-5,72660m'''_1-5,95115m^{iv}_1 \\
-144,236 = & -13,9967x'''_1-5,46998m'_1-5,72660m''_1+16,86113m'''_1-5,66330m^{iv}_1 \\
-150,382 = & -14,3087x^{iv}_1-5,49498m'_1-5,95115m''_1-5,66330m'''_1+17,69168m^{iv}_1
\end{array}\right\} (17)$$

le quali differiscono dalle (16) nel solo termine costante; che se le (17) si risolvono si avrà...

$\log x_1' = 2{,}20541\ldots n$ $\qquad \log m_1' = 1{,}41788\ldots n$
$\log x_1'' = 1{,}64474$ $\qquad \log m_1'' = 1{,}83984$
$\log x_1''' = 1{,}76580$ $\qquad \log m_1''' = 1{,}91179$
$\log x_1^{iv} = 1{,}76363$ $\qquad \log m_1^{iv} = 1{,}90142$,

donde

$$mm = 27268{,}7:$$

e poichè si è veduto avanti che l'error medio dell'equazioni (16) è $0',003531$, ne segue che, moltiplicato questo valore per 165,2 radice di 27268,7, si ha l'error medio della base dipendente dal paragone delle spranghe tra loro essere $m = \pm 0',583$.

§ 33. Noi nel § 23 abbiamo presentato un quadro di 12 valori di L ottenuti dai paragoni delle spranghe al campione: essi erano

Valori di L	Differenze dal medio $= v$.	vv
1729',1208	+0',0041	0',00001681
1164	—0 ,0003	0 ,00000009
1199	+0 ,0032	0 ,00001024
1180	+0 ,0013	0 ,00000169
1149	—0 ,0018	0 ,00000324
1178	+0 ,0011	0 ,00000121
1213	+0 ,0046	0 ,00002116
1189	+0 ,0022	0 ,00000484
1132	—0 ,0035	0 ,00001225
1152	—0 ,0015	0 ,00000225
1137	—0 ,0030	0 ,00000900
1100	—0 ,0067	0 ,00004489
medio=1729 ,1167		0 ,00012767=somma

dunque l'error medio è $m = \sqrt{\frac{0',00012767}{12-1}} = 0',003407$: e poichè la determinazione di L si fonda su 12 osservazioni,

e la misura eseguita si costituisce di 466,5 L; così l'error medio di paragone colla tesa sarà

$$=\frac{466{,}5}{\sqrt{12}}\times 0',003407=\pm 0',459$$

e questa è l'influenza che produce l'error di paragone delle spranghe al campione.

§ 34. Esaminiamo finalmente l'influsso che ha sulla base l'errore commesso nell'attuazione della misura, e per procedere a tale ricerca richiamiamo qualche formola di calcolo di compensazione.

Se per misurare la parte AT (*fig.* 24) della retta TM s'impiega a volte con uguale esattezza la unità di misura L, chiamando m l'error medio di AT ed m_1 quello di L, sarà $m_1=\frac{m}{\sqrt{a}}$. Analogamente se per misurare la parte AM s'impiega a' volte la L con esattezza uguale, ma diversa della precedente, chiamando m' l'errore di AM ed m'_1 quello di L, sarà $m'_1=\frac{m'}{\sqrt{a'}}$. Onde l'error medio di L proveniente da tuttaddue le misure sarà $\sqrt{\frac{mm}{a}+\frac{m'm'}{a'}}$, e quello della TM, supposto essersi eseguita la misura ripetendo tutte le L due volte, sarà $M=\sqrt{\frac{a+a'}{2}\left(\frac{mm}{a}+\frac{m'm'}{a'}\right)}$: veniamo ora all'applicazione di quest'ultima formola.

Il tratto TA della base è stato misurato due volte e si è trovato

183L+185',461   113L+184',872:

parimente il tratto AM nelle due misure si è trovato

354L+154',094   354L+156',785,

sicchè formati i due quadri seguenti saranno

	Misure	v	vv	mm
Tratto TA=113L+	185,461	−0,2945	0,08673025	0,17346
	184,872	+0,2945	0,08673025	

	Misure	v	vv	$m'm'$
Tratto AM=354L+	154,094 156,785	+1,3455 —1,3455	1,81037025 1,81037025	0,62074

e come $a=113$ $a'=354$, così la precedente formola darà

$$M=\sqrt{\frac{467}{2}\left(\frac{0,17346}{113}+\frac{3,62074}{354}\right)}=\pm 1',657.$$

Dunque ricapitolando l'error medio derivante dal paragone delle spranghe tra loro è $\pm 0',583$: quello che viene del paragone delle spranghe alla tesa $\pm 0',459$, e quello che nasce dall'attuazione dell' apparato è $\pm 1',657$; epperò l'error medio totale della base sarà

$$\mu=\sqrt{(0,583)^2+(0,459)^2+(1,657)^2}=\pm 1',816. \quad (18)$$

§ 35. È ormai tempo di ritornare su gli argomenti accennati avanti § 4 5, i quali per la loro importanza meritano uno sviluppamento, che allora non stimammo opportuno per non divergere dalla questione principale. Cominceremo dunque a discorrere sul modo di sottoporre una base ad una verificazione trigonometrica.

Sia ac (*fig.*[a] *25*) una base misurata in due tratti ab bc, e sieno d ed e due punti collegati ad a, b e c pei triangoli ben condizionati 1, 2, 3, 4, di cui gli angoli sieno tutti osservati e con bastante precisione. Ciò ammesso noi potrem compensare la nostra figura muovendo da queste condizioni:

1.° che la somma degli angoli abd dbc è uguale a 180°; poichè i due tratti ab e bc debbon trovarsi in linea retta:

2.° che la somma degli angoli abe ebc, è uguale a 180° per la stessa ragione:

3.° che la somma degli angoli del triangolo 1, toltone l'eccesso sferico, è uguale a 180°:

4.° che la somma degli angoli del triangolo 2 è uguale a 180°:

5.° che la somma degli angoli del triangolo 3 è uguale a 180°:

6.° che la somma degli angoli del triangolo 4 è uguale a 180°:

7.° che muovendo in fine da *ab*, dopo aver girato per tutti i triangoli si deve ritornar sopra la stessa *ab* con un valore identico,

Ora se gli angoli osservati dei diversi triangoli supponiamo essere rispettivamente

$X'_1 = 93^\circ \cdot 27' \cdot 25'',5$	$X'_2 = 86^\circ \cdot 32' \cdot 35'',$	$X'_3 = 87^\circ \cdot 52' \cdot 20'',$	$X'_4 = 92^\circ \cdot 07' \cdot 38'',5$
$X''_1 = 56 \cdot 12 \cdot 20$	$X''_2 = 31 \cdot 54 \cdot 57\ ,5$	$X''_3 = 60 \cdot 27 \cdot 31\ ,5$	$X''_4 = 30 \cdot 47 \cdot 41\ ,0$
$X'''_1 = 30 \cdot 20 \cdot 14$	$X'''_2 = 61 \cdot 32 \cdot 28\ ,5$	$X'''_3 = 31 \cdot 40 \cdot 09$	$X'''_4 = 57 \cdot 04 \cdot 40$
$179 \cdot 59 \cdot 59\ ,5$	$180 \cdot 00 \cdot 01\ ,0$	$180 \cdot 00 \cdot 00\ ,5$	$179 \cdot 59 \cdot 59\ ,5$

sarà

$X'_1 = 93^\circ \cdot 27' \cdot 25'',5$	$X'_3 = 87^\circ \cdot 52' \cdot 20'',$
$X'_2 = 86 \cdot 32' \cdot 35$	$X'_4 = 92 \cdot 07 \cdot 38\ ,5$
$180 \cdot 00 \cdot 00\ ,5$	$179 \cdot 59 \cdot 58\ ,5$

e quindi chiamando x'_1 la correzione di X'_1; x''_1 quella di X''_1 ec., si avranno le due equazioni di 1.ª classe

$$0 = +\,0,5 + x'_1 + x'_2$$
$$0 = -\,1,5 + x'_3 + x'_4$$

e le 4 equazioni di 2.ª classe

$$0 = -\,0,5 + x'_1 + x''_1 + x'''_1$$
$$0 = +\,1,0 + x'_2 + x''_2 + x'''_2$$
$$0 = +\,0,5 + x'_3 + x''_3 + x'''_3$$
$$0 = -\,0,5 + x'_4 + x''_4 + x'''_4\ ;$$

e siccome

$$\frac{\operatorname{sen} X'''_1}{\operatorname{sen} X''_1} = \frac{ab}{bd};\quad \frac{\operatorname{sen} X'''_2}{\operatorname{sen} X''_2} = \frac{bd}{bc};\quad \frac{\operatorname{sen} X'''_3}{\operatorname{sen} X''_3} = \frac{bc}{be};\quad \frac{\operatorname{sen} X'''_4}{\operatorname{sen} X''_4} = \frac{be}{ab};$$

così si avrà

$$\frac{\operatorname{sen} X'''_1 \operatorname{sen} X'''_2 \operatorname{sen} X'''_3 \operatorname{sen} X'''_4}{\operatorname{sen} X''_1 \operatorname{sen} X''_2 \operatorname{sen} X''_3 \operatorname{sen} X''_4} = 1$$

da cui per mezzo del seguente calcolo

$l \operatorname{sen} X'''_1 = 9 \cdot 7033674 + 36,0\, x'''_1$	$l \operatorname{sen} X''_1 = 9 \cdot 9196211 + 14,1\, x''_1$
$l \operatorname{sen} X'''_2 = 9 \cdot 9440681 + 11,4\, x'''_2$	$l \operatorname{sen} X''_2 = 9 \cdot 9231888 + 33,8\, x''_2$
$l \operatorname{sen} X'''_3 = 9 \cdot 7201707 + 34,2\, x'''_3$	$l \operatorname{sen} X''_3 = 9 \cdot 9395197 + 11,9\, x''_3$
$l \operatorname{sen} X'''_4 = 9 \cdot 9239737 + 13,6\, x'''_4$	$l \operatorname{sen} X''_4 = 9 \cdot 7092392 + 35,3\, x''_4$
$9 \cdot 2915799$	$9 \cdot 2915688$
$-\,5688$	
111	

si deduce l'equazione di 3.ª classe

$$0=+11,1+3,60\,x_1'''+1,14\,x_2'''+3,42\,x_3'''+1,36\,x_4'''$$
$$-1,41\,x_1''-3,38\,x_2''-1,19\,x_3''-3,53\,x_4''.$$

Dunque poste insieme le 7 equazioni antecedenti avremo

$$\begin{aligned} 0&=+0,5+x_1'+x_2' \\ 0&=-1,5+x_3'+x_4' \\ 0&=-0,5+x_1'+x_1''+x_1''' \\ 0&=+1,0+x_2'+x_2''+x_2''' \\ 0&=+0,5+x_3'+x_3''+x_3''' \\ 0&=-0,5+x_4'+x_4''+x_4''' \end{aligned} \qquad (19)$$

$$0=+11,1+3,60\,x_1'''+1,14\,x_2'''+3,42\,x_3'''+1,36\,x_4'''$$
$$-1,41\,x_1''-3,38\,x_2''-1,19\,x_3''-3,53\,x_4''$$

dalle quali dobbiam ritrarre i valori di x_1', x_1'' ec. ec. A tale oggetto differenziamole, e poi moltiplichiamo ognuna per un proprio coefficiente indeterminato, e si avranno le equazioni

$$0=\mathrm{B}\,dx_1'+\mathrm{B}\,dx_2'$$
$$0=\mathrm{B}_1dx_3'+\mathrm{B}_1dx_4'$$
$$0=\mathrm{C}\,dx_1'+\mathrm{C}\,dx_1''+\mathrm{C}\,dx_1'''$$
$$0=\mathrm{C}_1dx_2'+\mathrm{C}_1dx_2''+\mathrm{C}_1dx_2'''$$
$$0=\mathrm{C}_2dx_3'+\mathrm{C}_2dx_3''+\mathrm{C}_2dx_3'''$$
$$0=\mathrm{C}_3dx_4'+\mathrm{C}_3dx_4''+\mathrm{C}_3dx_4'''$$
$$0=\mathrm{A}(3,60dx_1'''+1,14dx_2'''+3,42dx_3'''+1,36dx_4'''-1,41dx_1''$$
$$-3,38dx_2''-1,19dx_3''-3,53dx_4''),$$

le quali, paragonate all'equazione

$$x_1'dx_1'+x_1''dx_1''+x_1'''dx_1'''+x_2'dx_2'+x_2''dx_2''+\text{ ec. ec.}\cdots=0,$$

ci offriranno

$$\left.\begin{aligned} x_1'&=\mathrm{B}+\mathrm{C} \\ x_2'&=\mathrm{B}+\mathrm{C}_1 \\ x_3'&=\mathrm{B}_1+\mathrm{C}_2 \\ x_4'&=\mathrm{B}_1+\mathrm{C}_3 \end{aligned}\;\right|\;\begin{aligned} x_1''&=\mathrm{C}-1,41\mathrm{A} \\ x_2''&=\mathrm{C}_1-3,38\mathrm{A} \\ x_3''&=\mathrm{C}_2-1,19\mathrm{A} \\ x_4''&=\mathrm{C}_3-3,53\mathrm{A} \end{aligned}\;\left|\;\begin{aligned} x_1'''&=\mathrm{C}+3,60\mathrm{A} \\ x_2'''&=\mathrm{C}_1+1,14\mathrm{A} \\ x_3'''&=\mathrm{C}_2+3,42\mathrm{A} \\ x_4'''&=\mathrm{C}_3+1,36\mathrm{A} \end{aligned}\right. \qquad (20)$$

donde si deduce dapprima

$$\mathrm{C}=\frac{x_1'+x_1''+x_1'''-\mathrm{B}-2,19\mathrm{A}}{3}=+\frac{0,5-\mathrm{B}-2,19\mathrm{A}}{3}$$
$$\mathrm{C}_1=\frac{x_2'+x_2''+x_2'''-\mathrm{B}-2,24\mathrm{A}}{3}=-\frac{1,0+\mathrm{B}-2,24\mathrm{A}}{3}$$
$$\mathrm{C}_2=\frac{x_3'+x_3''+x_3'''-\mathrm{B}_1-2,23\mathrm{A}}{3}=-\frac{0,5+\mathrm{B}_1+2,24\mathrm{A}}{3}$$
$$\mathrm{C}_3=\frac{x_4'+x_4''+x_4'''-\mathrm{B}_1+2,17\mathrm{A}}{3}=+\frac{0,5-\mathrm{B}_1+2,17\mathrm{A}}{3}$$

e poi per l'eliminazione si derivano i valori delle A, B, C, i quali introdotti nelle (20) ci daranno

$x_1' = +0,174$	$x_2' = -0,674$	$x_3' = +0,756$	$x_4' = +0,743$	
$x_1'' = +0,753$	$x_2'' = +0,369$	$x_3'' = -0,084$	$x_4'' = +0,454$	(21)
$x_1''' = -0,427$	$x_2''' = -0,695$	$x_3''' = -1,172$	$x_4''' = -0,698$	

Tali valori ottenuti, noi siamo in grado di correggere tutti i triangoli, sicchè muovendo dal tratto ab, che supponiamo essere uguale a $1167^{ps},1078$, potrem dedurre bc col seguente calcolo

$X_1''' = 30 \cdot 20 \cdot 13,573$	$9 \cdot 7033659$	$3 \cdot 0671110 = \log ab$
$X_1' = 93 \cdot 27 \cdot 25,674$	$9 \cdot 9992090$	$3 \cdot 3629541 = \log ad$
$X_1'' = 56 \cdot 12 \cdot 20,753$	$9 \cdot 9196222$	$3 \cdot 2833673 = \log bd$
$X_2''' = 61 \cdot 32 \cdot 27,805$	$9 \cdot 9440673$	$3 \cdot 2833673 = \log bd$
$X_2' = 86 \cdot 32 \cdot 34,326$	$9 \cdot 9992090$	$3 \cdot 3385090 = \log cd$
$X_2'' = 31 \cdot 54 \cdot 57,869$	$9 \cdot 7231900$	$3 \cdot 0624900 = \log bc$

il quale ci offre $bc = 1154^{ps},7553$, nel tempo che il valore di bc, misurato direttamente, noi supponiamo essere $bc = 1154^{ps},7430$. Bisogna dunque trovare il grado di fiducia che merita ciascuno dei due valori: la qual cosa conosceremo quando avrem trovato l'error medio di bc derivato da ab, e lo avrem paragonato a quello di bc misurato direttamente.

Per procedere a tale ricerca richiamiamo qualche principio di calcolo di compensazione.

§ 36. Se u è funzione delle variabili $y_1, y_2, y_3 \ldots$ legate tra loro per date equazioni, ed m_1 è l'error medio di ciascuna di queste; l'error medio di u sarà espresso da

$$m = m_1 \sqrt{L_1 L_1 + L_2 L_2 + \text{ec.}}, \text{ ossia da}$$

$$m = m_1 \sqrt{[LL]} \tag{22}$$

ove le L sono date dalle equazioni

$$\begin{aligned} L_1 &= l_1 + a_1 r_1 + b_1 r_2 + c_1 r_3 + \text{ec.} \\ L_2 &= l_2 + a_2 r_1 + b_2 r_2 + c_2 r_3 + \text{ec.} \\ L_3 &= l_3 + a_3 r_1 + b_3 r_2 + c_3 r_3 + \text{ec.} \\ &\text{ec. ec.} \end{aligned} \tag{23}$$

nelle quali l_1, l_2, l_3 ec. indicano rispettivamente i coefficienti

differenziali $\frac{du}{dy_1}$, $\frac{du}{dy_2}$, $\frac{du}{dy_3}$ ec. dedotti come se le variabili fossero indipendenti; a_1, b_1, c_1 ec. sono quantità che si rinvengono dal calcolo delle equazioni che legano le variabili, analogamente a ciò che si è praticato nel § 31; ad r_1, r_2, r_3 ec. si deducono dalle equazioni

$$
\begin{aligned}
0 &= [al] + [aa]r_1 + [ab]r_2 + [ac]r_3 + \text{ec.} \\
0 &= [bl] + [ab]r_1 + [bb]r_2 + [bc]r_3 + \text{ec.} \qquad (24) \\
0 &= [cl] + [ac]r_1 + [bc]r_2 + [cc]r_3 + \text{ec.} \\
&\text{ec. ec.}
\end{aligned}
$$

Applichiamo ora tale principio al caso nostro.

§ 37. I triangoli 1 e 2 ci offrono le seguenti relazioni

$$\frac{\operatorname{sen} X_1'''}{\operatorname{sen} X_1''} = \frac{ab}{db} \qquad \frac{\operatorname{sen} X_2'''}{\operatorname{sen} X_2''} = \frac{db}{bc};$$

dunque, fatto $ab = b$ e $bc = u$, si avrà l'equazione

$$u = b \frac{\operatorname{sen} X_1'' \times \operatorname{sen} X_2''}{\operatorname{sen} X_1''' \times \operatorname{sen} X_2'''} \qquad (25):$$

ove, essendo u funzione delle variabili X_1'' ec., si tratta di conoscere $m = m_1 \sqrt{[LL]}$. Cominciamo dal cercare m_1.

La formola, che ci dà l'error medio in equazioni condizionate come sono le (19), è $m_1 = \sqrt{\frac{[vv]}{n}}$, in cui n è il numero delle equazioni, e $[vv] = v_1 v_1 + v_2 v_2$ ec. rappresentano i quadrati delle correzioni; dunque mediante i pochi calcoli qui registrati si ricava il valore di m_1...

v	vv	v	vv
$x_1' = +0,171$	0,030276	$x_3' = +0,756$	0 ,571536
$x_1'' = +0,753$	0,567009	$x_3'' = -0,084$	0 ,037056
$x_1''' = -0,427$	0,182329	$x_3''' = -1,172$	1 ,373584
$x_2' = -0,674$	0,454276	$x_4' = +0,743$	0 ,552049
$x_2'' = +0,369$	0,136161	$x_4'' = +0,454$	0 ,206116
$x_2''' = -0,695$	0,483025	$x_4''' = -0,698$	0 ,487204

$$[vv] = 5\ ,050621$$

$$\frac{[vv]}{7} = 0\ ,721517$$

$$m_1 = \sqrt{\frac{[vv]}{7}} = 0'',8494$$

Restano ora a determinarsi le L, lo che otterremo nel seguente modo:

Differenziamo l'equazione (25) considerando le X variabili indipendenti ed avremo

$$du=\frac{u}{R''}\cot X_1''dX_1''+\frac{u}{R''}\cot X_2''dX_2''-\frac{u}{R''}\cot X_1'''dX_1'''$$

$$-\frac{u}{R''}\cot X_2'''dX_2'''\dots \qquad (26),$$

dalla quale si deducono i valori delle l per mezzo del calcolo qui registrato...

$$l\frac{u}{R''}=\underline{7\cdot 74806}$$

$\log.\cot X_1''=9\cdot 82562\dots\log l_1=7\cdot 57368\dots l_1=+0{,}003747$
$\log.\cot X_2''=9\cdot 79438\dots\log l_2=7\cdot 54244\dots l_2=+0{,}003487$
$\log.\cot X_1'''=9\cdot 76730\dots\log l_3=7\cdot 51536\ n\ l_3=-0{,}003276$
$\log.\cot X_2'''=9\cdot 73401\dots\log l_4=7\cdot 48207\dots l_4=-0{,}003034$

Ora è facile vedere che le equazioni (19) ci offrono

$$\begin{array}{lllllll}
a_1=1 & b_1=0 & c_1=0 & d_1=0 & e_1=\ \ 0 & f_1=1 & g_1=0\\
a_2=1 & b_2=0 & c_2=0 & d_2=0 & e_2=-1{,}41 & f_2=0 & g_2=0\\
a_3=1 & b_3=0 & c_3=0 & d_3=0 & e_3=+3{,}60 & f_3=0 & g_3=0\\
a_4=0 & b_4=1 & c_4=0 & d_4=0 & e_4=\ \ 0 & f_4=1 & g_4=0\\
a_5=0 & b_5=1 & c_5=0 & d_5=0 & e_5=-3{,}38 & f_5=0 & g_5=0\\
a_6=0 & b_6=1 & c_6=0 & d_6=0 & e_6=+1{,}14 & f_6=0 & g_6=0\\
a_7=0 & b_7=0 & c_7=1 & d_7=0 & e_7=\ \ 0 & f_7=0 & g_7=1\\
a_8=0 & b_8=0 & c_8=1 & d_8=0 & e_8=-1{,}20 & f_8=0 & g_8=0\\
a_9=0 & b_9=0 & c_9=1 & d_9=0 & e_9=+3{,}42 & f_9=0 & g_9=0\\
a_{10}=0 & b_{10}=0 & c_{10}=0 & d_{10}=1 & e_{10}=\ \ 0 & f_{10}=0 & g_{10}=1\\
a_{11}=0 & b_{11}=0 & c_{11}=0 & d_{11}=1 & e_{11}=-3{,}53 & f_{11}=0 & g_{11}=0\\
a_{12}=0 & b_{12}=0 & c_{12}=0 & d_{12}=1 & e_{12}=+1{,}36 & f_{12}=0 & g_{12}=0
\end{array}$$

dai quali valori ricaviamo non solo

$$\begin{array}{l}
[aa]=3,[ab]=0,[ac]=0,[ad]=0,[ae]=+\ 2{,}19,[af]=+1,[ag]=0\\
\qquad [bb]=3,[bc]=0,[bd]=0,[be]=-\ 2{,}24,[bf]=+1,[bg]=0\\
\qquad\qquad [cc]=3,[cd]=0,[ce]=+\ 2{,}22,[cf]=\ \ 0,[cg]=1\\
\qquad\qquad\qquad [dd]=3,[de]=-\ 2{,}17,[df]=\ \ 0,[dg]=1\\
\qquad\qquad\qquad\qquad [ee]=+55{,}12,[ef]=\ \ 0,[eg]=0\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [ff]=\ \ 2,[fg]=0\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [gg]=2
\end{array}$$

ma, ponendo essi valori in relazione con quelli di l precedentemente trovati, ricaveremo

$[al]=+0{,}003958;[bl]=-0{,}003034;[el]=0;[dl]=0;[el]-0{,}016711;$
$[fl]=+0{,}000713;[gl]=0;$

onde le equazioni (24) nel caso nostro diverranno

$$
\begin{array}{llllllll}
0=+0,003958 & +3,00r_1 & \cdot & \cdot & \cdot & +2,19r_5 & +r_6 & \cdot \\
0=-0,003034 & \cdot & +3,00r_2 & \cdot & \cdot & -2,24r_5 & +r_6 & \cdot \\
0= & \cdot & \cdot & +3,00r_3 & \cdot & +2,22r_5 & \cdot & +r_7 \\
0= & \cdot & \cdot & \cdot & +3,00r_4 & -2,17r_5 & \cdot & +r_7 \\
0=-0,016711 & +2,19r_1 & -2,24r_2 & +2,22r_3 & -2,17r_4 & +55,12r_5 & \cdot & \cdot \\
0=+0,000713 & +1,00r_1 & +1,00r_2 & \cdot & \cdot & \cdot & +2r_6 & \cdot \\
0= & \cdot & \cdot & +1,00r_3 & +1,00r_4 & \cdot & \cdot & +2r_7 ;
\end{array}
$$

dalle quali per mezzo dell'eliminazione si deducono

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
r_1=-0,00155 & r_3=-0,00033 & r_5=+0,00045 & r_7=0 : \\
r_2=+0,00143 & r_4=+0,00033 & r_6=-0,00030 &
\end{array}
$$

valori questi, i quali ci daranno

$$
\begin{array}{l|l}
L_1L_1=0,0000036100 & L_7L_7=0,0000001089 \\
L_2L_2=0,0000017161 & L_8L_8=0,0000007569 \\
L_3L_3=0,0000103041 & L_9L_9=0,0000014641 \\
L_4L_4=0,0000036100 & L_{10}L_{10}=0,0000001089 \\
L_5L_5=0,0000000081 & L_{11}L_{11}=0,0000015876 \\
L_6L_6=0,0000037636 & L_{12}L_{12}=0,0000008836 \\
 & [LL]=0,0000279219 ;
\end{array}
$$

epperò estraendo la radice e moltiplicando pel valore di m_1, si avrà in fine $m=0^{ps},004757$: e questo è l'error medio del lato bc derivato da ab.

Dobbiamo poi riflettere che sin qui implicitamente noi abbiam ritenuto essere ab quantità esatta, ma ciò è fisicamente impossibile, quindi se ammettiamo che essa sia affetta dall'error medio $0^{ps},002$, che chiamiamo m', ricaveremo l'influsso di m', su di bc dalla proporzione

$$b : u = m' : \frac{um'}{b} = 0^{ps},0019.$$

Per la qual cosa l'errore totale di bc sarà

$$m'' = 0^{ps},0067$$

§ 38. Or veniamo a paragonare l'esattezza di bc, quantità derivata da ab, a quella di bc misurata direttamente: e come $\frac{m''}{m'} = \frac{67}{20}$, così, chiamati p'', p' i pesi rispettivi delle due quantità, si avrà in numeri intieri

$$p'' : p' \left(= \frac{1}{m''m''} : \frac{1}{m'm'} \right) :: 1 : 11$$

dunque se moltiplichiamo per 11 la misura diretta di *bc*, ossia 1154ps,7430, ed al prodotto vi aggiungiamo la misura derivata 1154ps,7553, dividendo tutto per 12 avremo nel medio *bc*=1154ps,7433: e questo è un valore più verisimile di *bc*, di cui l'errore medio si ottiene mediante la formola, la quale offre l'error medio del medio di due quantità, che è la seguente

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m'm'} + \frac{1}{m''m''}}} \qquad (27)$$

ove introdotti i valori noti di m' ed m'' si otterrà

$$\mu = 0^{ps},0019.$$

Per mezzo di un procedimento analogo a quello tenuto sin qui, si potrebbe poi dalla base *bc* trovare quella *ab*, e dedurre un valore più preciso di questo tratto: ed al proposito è utile osservare, che questo secondo calcolo è assai più breve del primo, giacchè varii elementi rimangono gli stessi: e diviene più breve ancora se si ha cura di scegliere i due tratti presso a poco di uguale lunghezza.

§ 39. Ci rimane a dir parola sul modo di attaccare la rete geodetica alla base; ciò che faremo muovendo dalla teoria di compensazione, come nel § 35.

Sia dunque (*fig.a 26.*) 1·2 una base misurata in due tratti 1·5, 5·2; e sieno scelti intorno ad essa i punti 3,4,6,7 nel modo indicato nel § 5. Se supponiamo che gli angoli osservati sieno...

le
)).
o-
ci

gi-
al-
ase
, il
ne.
ano
in-
ori,
.

d
os
de
m
m
fo
qu

ov

Pe
qu
un
uti
del
div
tra

ret
teo

tra
nel
oss

lle
)).
o-
ci

gi-
al-
ase
, il
ne.
ano
in-
ori,
.

le quali corrispondono alle (28) colla sola differenza che alle correzioni sono sostituiti i valori dedotti dalle equazioni (29). Dunque, trattate convenientemente le equazioni (30), si trovano per A,B,C ec. tali valori, che sostituiti nelle (29), ci offriranno le correzioni che seguono...

$(3\underset{4}{;}5)=-0{,}07$	$(7\underset{6}{;}4)=-0{,}89$	$(1\underset{5}{;}4)=-0{,}56$
$(1\underset{3}{;}4)=-0{,}49$	$(2\underset{4}{;}6)=+0{,}28$	$(3\underset{5}{;}2)=-0{,}19$
$(4\underset{3}{;}5)=+0{,}28$	$(2\underset{6}{;}4)=-0{,}04$	$(3\underset{2}{;}6)=-0{,}20$
$(1\underset{4}{;}3)=+0{,}84$	$(2\underset{6}{;}3)=-0{,}04$	$(4\underset{2}{;}6)=+0{,}26$
$(6\underset{3}{;}4)=-1{,}58$	$(2\underset{3}{;}6)=-0{,}36$	$(5\underset{2}{;}4)=-0{,}45$
$(3\underset{7}{;}6)=+3{,}30$	$(1\underset{7}{;}4)=+1{,}78$	$(3\underset{2}{;}2)=+0{,}19$
$(3\underset{4}{;}6)=0{,}00$	$(7\underset{4}{;}1)=-1{,}43$	$(7\underset{1}{;}3)=+0{,}90$
$(3\underset{6}{;}7)=+1{,}81$	$(1\underset{7}{;}3)=+1{,}30$	$(4\underset{1}{;}7)=-0{,}75$
$(7\underset{3}{;}4)=-3{,}19$	$(1\underset{3}{;}7)=-2{,}70$	$(5\underset{1}{;}4)=-0{,}91$
$(7\underset{4}{;}3)=-0{,}59$	$(5\underset{4}{;}2)=-0{,}21$	$(3\underset{1}{;}5)=-0{,}04$
$(4\underset{7}{;}3)=+3{,}18$	$(5\underset{4}{;}1)=+0{,}77$	$(1\underset{5}{;}3)=-0{,}35$
$(4\underset{7}{;}6)=+0{,}68$	$(5\underset{3}{;}2)=-1{,}50$	$(1\underset{2}{;}5)=-0{,}21$
$(6\underset{4}{;}7)=-0{,}39$	$(4\underset{3}{;}2)=+0{,}26$	

Epperò, fatte agli angoli osservati le correzioni qui registrate, si avranno gli angoli compensati, che, posti a calcolo come qui appresso abbiam fatto col muovere dalla base misurata, ci offriranno un errore minimo sul lato 6·7, il quale può figurare come lato di attacco alla triangolazione. Osserveremo poi che i triangoli qui calcolati presentano molti lati di verificazione, e se taluni di questi non coincidono sino all'ultima cifra decimale, ciò dipende da errori, che possiam riguardare trascurabili in un puro esempio.

Angoli		Logaritmi de'lati	Lati	Angoli		Logaritmi de'lati	Lati
$1\,;_{3}\,5$	26·36·10, 05	3·0671110	1·5	$2\,;_{3}\,5$	25·09·58, 80	3·0528300	2·5
$3\,;_{1}\,5$	65·13·30, 16	3·3740914	3·5	$2\,;_{5}\,3$	91·49·40, 21	3·4239672	2·3
$2\,;_{5}\,1$	88·10·19, 79	3·4158033	1·3	$3\,;_{2}\,5$	63·00·20, 99	3·3740916	3·5
$1\,;_{4}\,5$	25·34·01, 07	3·0671110	1·5	$2\,;_{4}\,5$	23·53·26, 79	3·0528300	2·5
$4\,;_{1}\,5$	67·10·39, 39	3·3966592	4·5	$2\,;_{5}\,4$	92·44·40, 46	3·4448826	2·4
$1\,;_{5}\,4$	87·15·19, 54	3·4315657	1·4	$4\,;_{2}\,5$	63·21·52, 75	3·3966592	4·5
$1\,;_{7}\,4$	19·45·55, 88	3·4315657	1·4	$2\,;_{6}\,4$	19·17·17, 96	3·4448826	2·4
$4\,;_{1}\,7$	106·55.29, 35	3·8831985	4·7	$2\,;_{4}\,6$	44·05·05, 78	3·7683821	2·6
$1\,;_{4}\,7$	53·18·34, 77	3·8065358	1·7	$4\,;_{2}\,6$	116·37·36, 26	3·8772560	4·6
$1\,;_{3}\,7$	43·10·17, 40	3·8065358	1·7	$2\,;_{3}\,6$	44·30·19, 74	3·7683821	2·6
$3\,;_{1}\,7$	120·40·21, 10	3·9059100	3·7	$3\,;_{2}\,6$	117·00.10, 00	3·8725483	3·6
$1\,;_{7}\,3$	16·09·21, 50	3·4158026	1·3	$2\,;_{6}\,3$	18·29·30, 26	3·4239663	2·3
$4\,;_{3}\,7$	67·25·42, 91	3·8831985	4·7	$1\,;_{3}\,4$	24·15·25, 51	3·4315657	1·4
$3\,;_{4}\,7$	76·38·59, 71	3·9059106	3·7	$1\,;_{4}\,3$	23·20·24, 94	3·4158045	1·3
$3\,;_{7}\,4$	35·55·17, 38	3.6862063	3·4	$3\,;_{1}\,4$	132·24·09, 55	3·6862069	3·4
$3\,;_{6}\,4$	37·46·48, 22	3·6862063	3·4	$1\,;_{2}\,3$	63·00·20, 99	3·4158033	1·3
$3\,;_{4}\,6$	70·12·08, 70	3·8725478	3·6	$2\,;_{1}\,3$	65·13·30, 16	3·4239672	2·3
$4\,;_{3}\,6$	72·01·03, 08	3·8772561	4·6	$1\,;_{3}\,2$	51·46·08, 85	3·3610593	1·2
$3\,;_{7}\,6$	19·27·51, 60	3·8725478	3·6	$1\,;_{4}\,2$	49·27·27, 86	3·3610593	1·2
$6\,;_{3}\,7$	139·26·45, 99	4·1628391	6·7	$2\,;_{1}\,4$	67·10·39, 39	3·4448827	2·4
$3\,;_{6}\,3$	21·05·22, 41	3·9059103	3·7	$1\,;_{2}\,4$	63·21·52, 75	3·4315658	1·4

Qui pervenuti sembraci di avere svolto abbastanza quanto l'oggetto nostro richiedeva, e di potere dar fine al nostro ragionare. Solo notiamo che molto utile sarebbe tornato dedurre l'error medio del lato 6·7: e lo avremmo fatto, se per avventura il modo di procedere a tale ricerca non fosse quello stesso sviluppato nel § 37.

FINE.

Fig. 1ª

B

c a

A b C

Fig. 2

c b f g h
i d e h i

m b' f' g' k'

Fig. 6ª

O

Fi

b

F

d

R

a

Fig. 13ª